N° d'ordre

THÈSES

présentées à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Pierre STUTZ

PREMIÈRE THÈSE

Contribution à l'étude de la loi rhéologique des milieux pulvérulents

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Fluides anisotropes

Soutenues le 4 Mai 1972 devant la Commission d'Examen

M. NEEL Membre de l'Institut	Président
M. KRAVTCHENKO	Rapporteur
M. CRAYA M. ANGLES d'AURIAC	Examinateurs
M. SAWCZUK M. RADENKOVIC	Invités

GRENOBLE

N° d'ordre

THÈSES

présentées à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Pierre STUTZ

PREMIÈRE THÈSE

Contribution à l'étude de la loi rhéologique des milieux pulvérulents

---

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Fluides anisotropes

Soutenues le 4 Mai 1972 devant la Commission d'Examen

M. NEEL Membre de l'Institut	Président
M. KRAVTCHENKO	Rapporteur
M. CRAYA M. ANGLES d'AURIAC	Examinateurs
M. SAWCZUK M. RADENKOVIC	Invités

GRENOBLE

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

CONTRIBUTION A L'ETUDE

DE LA LOI RHEOLOGIQUE DES MILIEUX PULVERULENTS

-:-:-:-

AVANT-PROPOS

Au début de ce mémoire, je voudrais dire à Monsieur le Professeur NEEL toute ma gratitude ; il m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury et je lui en suis très reconnaissant.

Les travaux exposés dans ce mémoire ont pu être réalisés grâce à l'aide précieuse de tous ceux qui m'ont guidé et soutenu tout au long de mes recherches ; qu'ils trouvent ici l'expression de mes remerciements les plus sincères.

Monsieur le Professeur KRAVTCHENKO m'a accueilli dans son Laboratoire. L'intérêt qu'il a toujours manifesté pour mes recherches a été pour moi un précieux soutien.

Monsieur le Professeur SAWCZUK, Membre de l'Académie Polonaise des Sciences a assuré la direction de mes recherches avec la compétence et le discernement qui sont siens. Son concours éclairé et cordial, l'accueil chaleureux qu'il m'a toujours réservé ont été pour moi le guide et le soutien le plus sûr.

Monsieur le Professeur RADENKOVIC a guidé mes premiers pas de chercheur. Il ne m'a jamais ménagé son concours éclairé et son appui bienveillant.

Monsieur le Professeur ANGLES d'AURIAC m'a toujours accueilli chaleureusement. Les nombreuses discussions que nous avons pu avoir m'ont été très précieuses.

J'adresse aussi tous mes remerciements à Monsieur le Professeur CRAYA qui a bien voulu, au milieu de ses lourdes responsabilités, prendre sur son temps pour être du Jury de cette thèse.

Enfin, je remercie Mademoiselle FELIX-NAIX et Mademoiselle SOLARO qui ont déchiffré mon manuscrit, et Monsieur ELBERG qui a réalisé matériellement ce mémoire.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534904_0009

S O M M A I R E

Pages

N O T A T I O N S 9

INTRODUCTION 11

A. PRINCIPES FONDAMENTAUX

I. Principe d'isotropie de l'espace et d'objectivité..... 19
II. Vitesse de déformation et de rotation..... 23
III. Dérivée de JAUMANN..... 24
IV. Symétrie du matériau..... 26
V. Fonction scalaire et fonction tensorielle d'un tenseur.. 27

B. COMPORTEMENT RIGIDE-PLASTIQUE

I. Introduction..... 33
II. Définition du comportement parfaitement plastique..... 35
III. Expression analytique de la loi 38
a) Forme invariante 39
b) Condition d'homogénéité 40
c) Surface limite 40
d) Loi de déformation 42
e) Autre choix de variables cinématiques 43
IV. Fonction dissipation 46
a) Expression de la dissipation 47
b) Flux et forces généralisés 48
c) Généralisation des relations d'ONSAGER 49
d) Application au cas de plasticité 50
e) Principe de maximum pour la dissipation 56
V. Ecrouissage en densité 58
a) Généralités 58
b) Loi d'écrouissage 60
c) Application au matériau pulvérulent : 62
1° - Données expérimentales 62
2° - Surface limite de plasticité pour les sols. 64

C. PASSAGE CONTINU D'UN COMPORTEMENT ELASTIQUE A UN COMPORTEMENT PARFAITEMENT PLASTIQUE

I. Introduction..... 71

II. Equation de comportement 73

1° - Expression analytique de la loi 74

2° - Condition d'homogénéité par rapport au temps.. 74

3° - Décomposition de la loi et interprétation ... 76

4° - Grandes déformations 79

a) Etat critique 79

b) Ecoulement à état de contrainte constant. 81

c) Trajet sur la surface critique 82

5° - Expression des fonctions à l'état critique ... 83

6° - Domaine d'application 85

7° - Choix des fonctions en dehors de l'état critique 86

8° - Application au milieu pulvérulent..... 87

III. Application à quelques essais de mécanique des sols. Comparaison avec l'expérience 90

1° - Mouvement homogène sans accélération 91

2° - Essai de compression isotrope 92

3° - Essais triaxiaux 98

a) Essai à pression moyenne constante..... 100

b) Essai à pression latérale constante 104

c) Essai non drainé 106

d) Comparaison avec l'expérience 108

4° - Essai de cisaillement simple 120

5° - Trajet aller-retour 124

CONCLUSION 127

REFERENCES 129

PRINCIPALES NOTATIONS

$\vec{e}_i$: Vecteurs de base d'un repère orthonormé

X : Position initiale de la particule matérielle P

x : Position actuelle de la particule

δ : Symbole de KRONECKER

Q : Tenseur orthogonal

F : Tenseur gradient de déformation

L : Tenseur gradient de vitesse

d : Tenseur vitesse de déformation

$\bar{d}$: Déviateur de d

d_i, $\bar{d}_i$: Valeurs principales de d et $\bar{d}$

E_1 : Premier invariant de d $\quad E_1 = d_{ii}$

$\bar{E}_2^2$, $\bar{E}_3^3$: Invariants de $\bar{d}$ $\quad \bar{E}_2^2 = \bar{d}_{ij}\,\bar{d}_{ij}$ $\quad \bar{E}_3^3 = \bar{d}_{ij}\,\bar{d}_{jk}\,\bar{d}_{ki}$

$\dot{\omega}$: Tenseur vitesse de rotation

ε : Tenseur de déformation infinitésimale

σ : Tenseur contrainte de CAUCHY

$\bar{\sigma}$: Déviateur de σ

σ_i , $\bar{\sigma}_i$: Valeurs principales de σ et $\bar{\sigma}$

S_1 : Premier invariant de σ $\quad S_1 = \sigma_{ii}$

$\bar{S}_2^2$, $\bar{S}_3^3$: Invariants de $\bar{\sigma}$ $\quad \bar{S}_2^2 = \bar{\sigma}_{ij}\,\bar{\sigma}_{ij}$ $\quad \bar{S}_3^3 = \bar{\sigma}_{ij}\,\bar{\sigma}_{jk}\,\bar{\sigma}_{ki}$

$\bar{M}$, $\bar{N}$: Invariants mixtes de $\bar{\sigma}$ et $\bar{d}$ $\quad \bar{M} = \bar{\sigma}_{ij}\,\bar{d}_{ji}$ $\quad \bar{N} = \bar{\sigma}_{ij}\,\bar{\sigma}_{jk}\,\bar{d}_{ki}$

$\hat{\sigma}$: Dérivée de JAUMANN de σ

../..

$\hat{S}_1$: Premier invariant de $\hat{\sigma}$ $\quad S_1 = \hat{\sigma}_{ii}$

$\hat{\bar{S}}_2^2$, $\hat{\bar{S}}_3^3$: Invariants mixtes de $\bar{\sigma}$ et $\hat{\sigma}$ $\quad \hat{\bar{S}}_2^2 = 2\,\bar{\sigma}_{ij}\,\hat{\bar{\sigma}}_{ji}$ $\quad \hat{\bar{S}}_3^3 = 3\,\bar{\sigma}_{ij}\,\bar{\sigma}_{jk}\,\hat{\bar{\sigma}}_{ki}$

ϕ : Angle de frottement interne

ϕ : Valeur critique de ϕ

ρ : Densité

ρ_c : Densité critique

G : Surface critique

f : Surface de charge

INTRODUCTION

L'étude rhéologique sommaire des sols met en évidence, pour les milieux cohérents, un comportement élasto-visco-plastique, et pour les milieux pulvérulents un comportement élasto-plastique seul. Bien entendu, cette classification des propriétés rhéologiques n'a rien d'absolu et ne constitue qu'une première approximation de la réalité physique.

L'étude que nous avons entreprise a pour but de préciser la formulation de la loi rhéologique des milieux pulvérulents. Nous la restreignons en écartant les phénomènes tels que vieillissement, effet de mémoire et anisotropie. Nous cherchons à décrire par une loi de comportement unique le plus grand nombre possible de faits observés.

Les calculs de distribution de contrainte et de déformation sont effectués habituellement par les praticiens en adoptant la loi la plus simple qui soit : élasticité linéaire. Pour les problèmes de résistance limite, on a recours au schéma du corps rigide plastique.

Ces idéalisations drastiques ne peuvent être considérées que comme des approximations, valables dans des domaines très limités. L'approximation élastique ne peut être utilisée que si les déformations sont infinitésimales. Quant au schéma rigide-plastique, il ne peut s'appliquer que si le matériau a déjà subi des déformations très importantes qui l'ont amené à un état "critique" où la déformation peut se poursuivre indéfiniment, à état de contrainte constant et à volume constant.

Remarquons que ces idéalisations, bien que très pratiques pour le calcul, posent des problèmes importants pour la détermination des coefficients de ces lois.

Le comportement rhéologique des sols est par bien des points très éloigné du schéma élastique-plastique.

Il est tout d'abord très difficile, sinon impossible, de définir à partir de quel état de contrainte on passe d'un comportement élastique au comportement plastique. Pour un premier chargement, les déformations irréversibles qui se produisent pour de très petites déformations ne peuvent être négligées, ce qui limite considérablement l'emploi du schéma élastique.

L'état de plasticité parfaite n'est atteint qu'après la phase, très nettement observée dans bien des sols, où le cisaillement s'accompagne d'une variation de volume ; celle-ci est souvent beaucoup plus importante que celle produite par la variation de la pression isotrope. La variation de volume due au cisaillement entraîne une variation très importante de la résistance du matériau ; celle-ci est bien mise en évidence par l'écart très important existant entre les maxima et les paliers des courbes de charges des essais de résistance mécanique des sols. Pour prendre en compte cette différence, BISHOP [5] introduit un indice de fragilité.

Il est donc désirable de relier les deux comportements idéaux, élastique et parfaitement plastique, en recherchant une loi de comportement qui puisse prendre en compte les caractères phénoménologiques principaux des milieux pulvérulents, notamment les variations de volume dues au seul cisaillement et qui furent mises en évidence déjà par REYNOLDS [28]. C'est là un des objectifs que nous avons cherché à atteindre.

Résumons maintenant les principaux travaux effectués jusqu'à ce jour pour définir le comportement rhéologique des sols.

Malgré les différences très marquées que l'on observe entre le comportement mécanique des sols pulvérulents et le comportement des métaux, de nombreuses tentatives ont été faites pour décrire le sol comme un matériau écrouissable, en essayant de transposer aux sols les théories de la plasticité habituellement utilisées pour les métaux. En particulier, on a essayé d'employer la loi, si pratique, du potentiel plastique. Citons les travaux en ce sens de DRUCKER et PRAGER [11] ,HENCKEL DRUCKER, GIBSON [10], POOROOSHASB et HOLUBEC [25]. Ces derniers auteurs ont montré en particulier que le sable, considéré comme un matériau élasto-plastique, ne suit pas certaines lois déduites de la théorie "classique" de la plasticité. Ils ont toutefois montré que le vecteur accroissement de déformation plastique a une direction indépendante du gradient de contrainte, ce qui n'est pas incompatible avec l'hypothèse du potentiel plastique.

En interprétant la déformation plastique comme le résultat d'un double glissement le long de directions particulières (lignes caractéristiques), et en supposant l'incompressibilité du matériau, d'autres chercheurs, comme JOSSELIN DE JONG [8] et SPENCER [34] aboutissent, pour les problèmes de déformation plane, à une loi de déformation plastique différente de la loi du potentiel. MANDEL [23] remarqua par la suite que le mécanisme du double glissement est insuffisant en général pour décrire les déformations des sols. Pour ces matériaux "non standard", c'est-à-dire qui n'obéissent pas à la loi du potentiel, il faut citer les résultats de RADENKOVIC [27] , et plus tard de PALMER [24] , qui permettent une extension aux sols des théorèmes limites.

D'un autre côté, KONDER et ZELASKO [20] ont essayé de donner une expression analytique de la courbe de charge obtenue dans l'essai triaxial, afin de décrire d'une manière continue le travail de ce matériau. Cette tentative ne s'appuie que sur des essais triaxiaux à contrainte imposée : en conséquence, le comportement du sol correspondant à la phase où la résistance est une fonction croissante de la déformation est le seul à être décrit. La loi proposée ne peut donc pas être considérée comme une loi générale de comportement, mais simplement comme une loi partielle, valable pour un type d'essai particulier.

L'analyse précédente nous amène à penser qu'il n'existe actuellement pas de théorie de la déformation plastique satisfaisante pour les sols. Ou bien les théories en cause utilisent des lois de comportement qui manquent de bases expérimentales solides, ou bien ces théories ne représentent que des coupes de la loi générale applicables à des cas particuliers. Remarquons que la théorie mathématique de la plasticité recherche encore ses fondements : aussi n'est-il pas étonnant que les théories qui sont généralement adoptées pour certaines classes de matériaux ne puissent être transposées à d'autres classes.

Notre premier travail a donc été une tentative pour apporter une contribution à la théorie de la plasticité. Aussi avons nous adopté le schéma du corps rigide parfaitement plastique.

Lors de l'écoulement plastique, nous admettons que l'état du corps peut être défini à chaque instant par une relation entre le tenseur contrainte $\underline{\sigma}$ et le tenseur vitesse de déformation $\underline{d}$. Cette relation, pour satisfaire au principe d'objectivité, est nécessairement isotrope. Sa forme la plus générale est donc :

$$\underset{\sim}{\sigma} = a_0 \underset{\sim}{\delta} + a_1 \underset{\sim}{d} + a_2 \underset{\sim}{d}^2$$

où a_0, a_1 et a_2 sont des fonctions scalaires des invariants E_i de $\underset{\sim}{d}$.

Nous demandons alors au second membre de cette relation d'être homogène d'ordre zéro par rapport au temps. Cette condition traduit l'hypothèse de l'indépendance des propriétés mécaniques du matériau par rapport aux vitesses d'applications des sollicitations auxquelles on le soumet.

On établit alors que les fonctions a_i dépendent seulement de deux arguments : $\frac{E_1}{E_2}$ et $\frac{E_3}{E_2}$. Il en résulte qu'une relation lie les invariants S_i du tenseur contrainte : $f(S_i) = 0$. C'est la condition de plasticité ou l'équation de la surface limite. Quant à sa forme, et à la loi de déformation qui lui est associée, elles dépendent du choix des trois fonctions arbitraires à déterminer par l'expérience. Dans le cas général, quelque soit l'état de contrainte sur la surface limite, la relation étudiée pour décrire le comportement plastique ne permet pas d'obtenir un écoulement à volume constant. Si la condition d'incompressibilité est imposée, la relation générale devra se réduire à une relation entre les déviateurs des tenseurs considérés.

Pour les milieux pulvérulents, compte tenu des résultats expérimentaux, nous avons proposé une nouvelle relation pour définir la surface limite des sols ; nous avons abandonné l'hypothèse de la courbe intrinsèque et fait intervenir la contrainte principale intermédiaire dans le critère.

Il est clair qu'en l'état actuel de nos moyens de laboratoire, la détermination explicite des fonctions caractéristiques pose des problèmes insolubles.

Aussi nous avons cherché à préciser a priori la forme de ces fonctions en supposant valables dans notre cas les relations de symétrie d'ONSAGER. Il en résulte que la fonction $f(S_i) = 0$ joue le rôle du potentiel plastique, sans pour autant que la loi de plasticité ainsi obtenue se réduise à la théorie classique du "potentiel". Ainsi, la loi de COULOMB et la règle de la normalité seraient incompatibles avec les propriétés ci-dessus établies.

Une deuxième approche consiste à postuler que l'écoulement satisfait à un principe de maximum pour la fonction dissipation. S'il en est ainsi, nous montrons que les propriétés mécaniques sont entièrement définies par une seule fonction de deux paramètres.

C'est à l'expérience qu'il convient de demander des informations pour aller plus loin; elle semble d'ailleurs mettre en lumière le rôle significatif de la densité locale dans la phase qui précède la plasticité infinie.

Nous avons tenté de formuler une loi de comportement qui permette de décrire analytiquement cette influence.

A cet effet, nous avons admis que la densité ρ figurait à titre d'argument dans les fonctions définissant la loi de plasticité. Moyennant cette hypothèse, la théorie de la plasticité que nous avons précédemment définie conduit à l'existence d'une famille de surfaces $f(S_i, \rho)$ paramétrées chacune par la densité ρ, et à l'équation de la surface critique $G(S_i)$, lieu des points où la déformation plastique s'effectue à volume constant. La surface critique définit les états de contrainte et de densité pour lesquels une "plasticité infinie" est possible.

Telles sont les réponses partielles que l'on peut apporter au problème général du comportement plastique des sols.

Les lois du type précédent ne permettent pas d'englober dans un formalisme analytique unique la plasticité et les déformations irréversibles qui apparaissent à tous les stades de la déformation, même dans la phase qui est habituellement supposée élastique. C'est à ce problème que nous avons, dans la dernière partie de notre travail, essayé d'apporter une contribution.

On peut supposer que la loi du type cherché doit se présenter sous la forme d'une relation tensorielle isotrope entre le tenseur vitesse de déformation, le tenseur contrainte et sa dérivée par rapport au temps ; pour ce dernier, nous avons utilisé la dérivée de JAUMANN : [18].

De la forme la plus générale nous n'avons retenu que la partie quasi linéaire $\hat{\underset{\sim}{\sigma}} = a_0 \underset{\sim}{\delta} + a_1 \underset{\sim}{\sigma} + a_2 \underset{\sim}{d}$; les fonctions scalaires a_0, a_1 et a_2 ont pour arguments les neuf invariants indépendants formés à partir des tenseurs $\underset{\sim}{\sigma}$ et $\underset{\sim}{d}$. En imposant à cette relation la condition d'homogénéité d'ordre zéro par rapport au temps, et moyennant une forme particulière pour les fonctions a_i, cette loi peut s'exprimer au moyen de sept fonctions α_i des seuls invariants de $\underset{\sim}{\sigma}$.

Ces fonctions α_i peuvent être déterminées en demandant à cette dernière relation de pouvoir décrire un comportement élastique linéaire pour des déformations infinitésimales, et un comportement parfaitement plastique pour de très grandes déformations. Les fonctions α_i sont donc étroitement liées aux fonctions a_i qui servaient à définir la loi plastique avec écrouissage en densité.

Afin de comparer la théorie et l'expérience, nous avons traité les exemples de compression isotrope, d'essai triaxial "classique" à pression latérale constante et à pression moyenne constante, ainsi que l'essai triaxial non drainé.

La comparaison avec l'expérience est des plus encourageante. Les courbes de charges théoriques et expérimentales sont très voisines, ainsi que les courbes donnant les variations de volume et la pression interstitielle.

PREMIERE PARTIE

PRINCIPES FONDAMENTAUX

Dans ce premier chapitre, nous exposons rapidement les principes fondamentaux sur lesquels s'appuient les recherches actuelles concernant la détermination des lois de comportement des matériaux.

Ces principes, isotropie de l'espace et objectivité, nous conduiront à introduire la dérivée par rapport au temps d'un tenseur au sens de JAUMANN.

Enfin, après avoir indiqué les conditions imposées par les symétries du matériau sur la forme de la loi de comportement, nous rappelons quelques résultats sur les fonctions scalaires et tensorielles de tenseurs qui seront utilisées dans notre travail.

I- PRINCIPE D'ISOTROPIE DE L'ESPACE ET OBJECTIVITE.

Les propriétés d'un matériau sont indépendantes de sa position et de son orientation dans l'espace : ce sont des propriétés du corps. Aussi, la réponse du matériau à des sollicitations données devra être indépendante de la position du corps dans l'espace, c'est-à-dire de sa position par rapport à un repère fixé a priori. Ce principe est celui de l'isotropie de l'espace.

La description de la réalité physique doit en plus être indépendante de l'observateur et de son mouvement. Nous entendons par observateur un repère de référence possédant une échelle du temps. C'est le principe d'objectivité.

Les lois de comportement des matériaux devront vérifier ces principes. Nous allons donc examiner les restrictions qu'ils imposent.

Un corps B est un ensemble de particules qui occupent certaines positions par rapport à un repère de référence. Dans chaque repère de référence, le système de coordonnées peut être choisi arbitrairement ; nous choisirons toujours un système de coordonnées cartésiennes orthogonales.

En tout point du domaine occupé par le corps correspond une particule matérielle P (milieu continu). La configuration du corps est donnée à chaque instant t par la position, dans le repère de référence choisi $(O, \vec{e_i})$, de chacune des particules: $x = \chi (P, t)$. On peut alors, en choisissant une configuration de référence, par exemple la position du corps au temps $t = 0$, identifier la particule P avec sa position X dans la configuration de référence $X = K (P,t) = 0$.

Le mouvement du corps peut être décrit par la suite des configurations occupées à chaque instant par le corps

$$x = \chi (P, t) = \chi_K (X , t) \qquad (1.1)$$

(description matérielle ou Lagrangienne).

Si T est une grandeur fonction du mouvement du corps (T est par exemple l'état de contrainte en un point du corps), on dira que T est la réponse du corps à la sollicitation χ : $T = \mathcal{F}(\chi)$; $\mathcal{F}$ est la relation fonctionnelle liant T et χ ; nous n'examinons que le cas où elle se réduit à une fonction scalaire ou tensorielle f.

Le principe d'isotropie de l'espace impose à la réponse du corps d'être indépendante de la position du corps par rapport au repère de référence choisi $(O, \vec{e}_i)$.

Considérons alors deux échantillons identiques d'un même corps, occupant au temps $t = 0$, dans le même repère $(O, \vec{e}_i)$, deux configurations initiales différentes, $K(P)$ et $K'(P)$.

Si à chaque instant t, la configuration χ' se déduit de la configuration χ par une rotation définie par un tenseur orthogonal $Q(t)$ et une translation définie par un vecteur $\vec{C}(t)$:

$$x' = Q(t)\, x + C(t)$$

où

$$\begin{aligned} x &= \chi\,(P, t) \\ x' &= \chi'\,(P', t) \\ QQ^T &= I \end{aligned} \qquad (1.2)$$

On note symboliquement par x' et x l'ensemble des composantes des vecteurs $\overrightarrow{OP'}$ et $\overrightarrow{OP}$ dans la base $\vec{e}_i$.

Les réponses T' et T devront vérifier

$$T' = Q\, T\, Q^t \qquad (1.3)$$

si T est un tenseur du deuxième ordre.

Si la réponse T est à chaque instant donnée par la relation $T = f(\chi_{(t)})$, l'application f devra vérifier

$$Q\, f(\chi)\, Q^t = f\,(C + Q\chi) = f\,(\chi') \qquad (1.4)$$

pour tout $C_{(t)}$ et tout $Q_{(t)}$.

Considérons maintenant deux observateurs, c'est-à-dire deux repères d'origines O et O', de vecteurs de base $\vec{e}_i$ et $\vec{e}'_i$. La position d'un corps sera décrite respectivement dans $(O, \vec{e}_i)$ et $(O', \vec{e}'_i)$ par les configurations $x = \chi(P,t)$ et $x' = \chi'(P,t)$. Le changement de repère de référence sera donné par :

$$x' = Q_{(t)}x + C_{(t)} \tag{1.5}$$

où : x' et x désignent respectivement les positions de la même particule P dans les repères $(O', \vec{e}'_i)$ et $(O, \vec{e}_i)$;
$C_{(t)}$ représente la position de O dans $(O', \vec{e}'_i)$;
et $Q_{(t)}$ l'orientation de $(O, \vec{e}_i)$ par rapport à $(O', \vec{e}'_i)$.

La relation (5) ne doit pas être interprétée comme un changement de système de coordonnées comme la relation (2) dans un même repère, mais comme un changement de système de référence.

Soit T la réponse du matériau dans $(O, \vec{e}_i)$ à la sollicitation χ et T' la réponse à χ' dans $(O', \vec{e}'_i)$. Les réponses T et T' devront être les "mêmes", au sens tensoriel

$$T' = Q\,T\,Q^t \quad \text{ou} \quad T' = QT \tag{1.6}$$

si T est un tenseur du deuxième ordre ou du premier ordre.

Il en résulte que les applications $f(\chi)$ et $f(\chi')$, devront être formellement les "mêmes", c'est-à-dire invariantes dans le changement de repère défini par (5)

$$f(\chi') = f(Q_{(t)}\chi + C_{(t)}) = Q\,f(\chi)\,Q^t \tag{1.7}$$

Si dans les équations de comportement n'intervenaient que des grandeurs indépendantes du mouvement, le principe d'objectivité serait automatiquement vérifié, car ces grandeurs seraient les mêmes (tensoriellement) dans tout repère (grandeurs naturellement objectives).

La difficulté provient du fait que certaines grandeurs font intervenir le mouvement du corps par rapport au repère choisi $(O, \vec{e}_i)$: ceci introduit dans la loi de comportement, si elle est écrite dans un autre repère $(O', \vec{e}'_i)$, le mouvement (vitesse, accélération) du premier repère par rapport au second et non pas seulement son orientation. L'objectivité de la loi n'est plus vérifiée.

Il est donc nécessaire d'employer dans la formulation des lois des quantités "objectives", qui, dans le changement de repère (1), obéissent aux lois de transformation des tenseurs et ne font pas intervenir le mouvement d'un repère particulier.

Pour un matériau élastique où $T = f(F)$, T étant la contrainte et F le gradient de déformation, l'objectivité entraîne

$$Q\, f(F)\, Q^t = f(QF) \tag{1.8}$$

puisque le gradient de déformation se transforme comme un vecteur dans un changement de repère de référence.

De nombreuses quantités, comme la vitesse de rotation, la dérivée par rapport au temps de la contrainte... ne se transforment pas comme des tenseurs dans un changement de repère (grandeurs non objectives). De telles grandeurs ne peuvent donc être employées dans les équations constitutives, puisque l'invariance des équations ne serait pas satisfaite.

On peut alors avoir recours à deux procédés :

- soit utiliser des quantités naturellement objectives ou rendues objectives pour écrire les lois de comportement. Ce procédé risque alors de masquer la réalité physique par son écriture mathématique ;
- soit utiliser une certaine classe de repères définis à partir de l'écoulement.

II. VITESSE DE DEFORMATION ET DE ROTATION.

Considérons le mouvement d'une particule, décrit dans le repère $(O,\vec{e}_i)$ à partir de la configuration de référence $X = K(P)$, par $x = \chi_K(X,t)$.

La vitesse de la particule P qui occupait la position X dans l'état initial est :

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\chi(X, t)\right) \tag{2.1}$$

Considérons un nouveau repère de référence $(O', \vec{e}'_i)$ dans lequel la configuration de référence du même corps est $X' = K'(P)$. Le mouvement est alors décrit dans ce nouveau repère par

$$x' = \chi_{K'}(X', t) \tag{2.2}$$

Il est relié au mouvement x dans $(O, \vec{e}_i)$ par

$$x' = Q_{(t)}\, x + C_{(t)} \tag{2.3}$$

Les deux repères sont en général mobiles l'un par rapport à l'autre.

La vitesse de la particule P par rapport à $(O', \vec{e}'_i)$ est :

$$\dot{x}' = \dot{C}_{(t)} + \dot{Q}_{(t)}\, x + Q_{(t)}\, \dot{x} \tag{2.4}$$

où le point indique la dérivation par rapport au temps,

$\dot{x}$ représente les composantes de la vitesse de P par rapport au repère $(O,\vec{e}_i)$.

Calculons alors le tenseur gradient de vitesse défini dans $(O', \vec{e}'_i)$ par :

$$d v' = L'\, dx' \tag{2.5}$$

On obtient : $$L' = \dot{Q}_{(t)} \cdot Q^t_{(t)} + Q_{(t)}\, L.\, Q^t_{(t)} \tag{2.6}$$

avec dans $(O, \vec{e}_i)$, $dv = L\, d\, x$ (2.7)

Le gradient de vitesse n'est donc pas une quantité objective.

Pour la vitesse de déformation définie dans chaque repère par

$$D = \frac{1}{2} (L + L^t)$$
$$\text{et} \qquad D' = \frac{1}{2} (L' + L'^t) \tag{2.8}$$

on obtient :

$$D' = \frac{1}{2} \dot{Q} Q^t + Q \dot{Q}^t + Q L Q^t + Q L^t Q^t \tag{2.9}$$

où, puisque

$$\dot{Q} Q^t + Q \dot{Q}^t = 0 \tag{2.10}$$

$$D' = Q D Q^t \tag{2.11}$$

La vitesse de déformation est donc une quantité objective.

On obtiendrait pour la vitesse de rotation définie par

$$W = \frac{1}{2} (L - L^t) \qquad \text{et} \qquad W' = \frac{1}{2} (L' - L'^t) \tag{2.12}$$

$$W' = \dot{Q} Q^t + Q W Q^t = - Q \dot{Q}^t + Q W Q^t \tag{2.13}$$

W n'est donc pas objective.

Remarquons également que :

$$\dot{Q} = W' Q - Q W$$
$$\dot{Q}^t = - Q^t W' + W Q^t \tag{2.14}$$

III. DERIVEE DE JAUMANN.

Soit T un tenseur du deuxième ordre, par exemple le tenseur contrainte de CAUCHY. Son expression dans le repère $(O', \vec{e}'_i)$ sera obtenue à partir de son expression T dans $(O, \vec{e}_i)$ par :

$$T' = Q T Q^t \tag{3.1}$$

Supposons T' fonction du temps et considérons sa dérivée matérielle

$$\dot{T}' = \dot{Q} T Q^t + Q \dot{T} Q^t + Q T \dot{Q}^t \tag{3.2}$$

Il est alors bien évident que $\dot{T}$ n'est pas un tenseur sous le Groupe Q.

En utilisant les relations (14) on obtient :

$$\dot{T}' - W' T' + T' W' = Q (\dot{T} - WT + TW) Q^t \qquad (3.3)$$

ce qui montre que la grandeur entre parenthèses est une quantité objective.

L'opérateur $\dot{T}$, qui n'était pas objectif, peut être remplacé par l'opérateur

$$\hat{T} = \dot{T} - W T + T W \qquad (3.4)$$

qui est objectif. $\hat{T}$ est la dérivée de JAUMANN. [18]

Il existe une certaine classe de repères à l'origine desquels l'opérateur $\hat{T}$ se réduit à $\dot{T}$. Supposons en effet que l'origine O' soit confondue avec la particule P. La vitesse de P par rapport à $(O', \vec{e}_i')$ sera donc nulle. De plus, on peut imposer à ce repère de tourner à la vitesse de rotation de la particule P. Ces conditions entraînent $W' = 0$.

On voit donc qu'à l'origine O', $\hat{T}'$ se réduit à la dérivée totale par rapport au temps que l'on notera $(\frac{dT'}{dt})_P$.

Ces relations nous permettront de définir la dérivée absolue par rapport au temps, dans un repère quelconque, par

$$\frac{DT}{Dt} = (\frac{dT'}{dt})_P \qquad (3.5)$$

Il en résulte immédiatement que l'expression de $\frac{DT}{dt}$ dans $(O, \vec{e}_i)$ est

$$\dot{T} - W T + T W \qquad (3.6)$$

L'expression de la loi de comportement aura donc sa forme la plus simple dans un repère $(O', \vec{e}_i')$ d'origine P défini ci-dessus. Ce repère est appelé rhéologique par ANGLES D'AURIAC [1] [2].

Remarquons que pour le calcul des dérivées des invariants par rapport au temps, les règles habituelles de dérivation sont applicables si l'opérateur dérivée est celui de JAUMANN, puisque cet opérateur exprime la dérivée absolue par rapport au temps. Par exemple pour l'invariant tr(ABC) on obtiendra pour la dérivée

$$tr\,(\hat{A}BC) + tr\,(A\hat{B}C) + tr\,(AB\hat{C}) \qquad (3.7)$$

Si d'autres opérateurs dérivée, également objectifs tels ceux de TRUESDELL ou OLROYLD, étaient employés pour le calcul des dérivées des invariants, les règles habituelles de dérivation ne seraient plus applicables.

IV- SYMETRIES DU MATERIAU.

Considérons deux échantillons d'un même corps, en tous points identiques (contrainte, déformation, température...), mais occupant des places différentes par rapport à un même repère de référence $(O, \vec{e}_i)$. Soient $X = K(P)$ et $X' = K'(P)$ les configurations de ces échantillons. On passe d'une configuration à l'autre par

$$X' = R\,X + C \qquad (4.1)$$

Imposons aux échantillons les déformations décrites par les mouvements $x = \chi\,(X_{(t)})$ et $x' = \chi'\,(X'_{(t)})$ tels que les gradients de déformation par rapport aux configurations de référence K et K' vérifient

$$\frac{\partial \chi}{\partial X} = \frac{\partial \chi'}{\partial X'} \qquad (4.2)$$

Soient $T = f(\chi)$ et $T' = f'(\chi')$ les réponses des deux échantillons. Si les réponses sont les mêmes $T = T'$, les configurations K et K' ne peuvent être distinguées. Le matériau possède donc dans la configuration K une propriété de symétrie caractérisée par la rotation R. L'ensemble des symétries du matériau forme le groupe $\{R\}$ des symétries du corps.

Nous obtenons, pour la loi de comportement, du fait que $f = f'$ et compte tenu de la relation (1)

$$f(\chi\,(X,t)) = f(\chi\,(RX,t))$$

Suivant la définition de NOLL, le groupe de symétrie du corps est "le groupe des transformations des coordonnées matérielles qui laissent les équations de comportement invariantes".

Un matériau sera dit isotrope dans la configuration de référence $X = K(P)$ si le groupe $\{R\}$ est identique au groupe orthogonal $\{Q\}$.

V- FONCTION SCALAIRE ET FONCTION TENSORIELLE D'UN TENSEUR.

La formulation des lois de comportement fait intervenir des fonctions à valeurs scalaires ou tensorielles dont les arguments sont des tenseurs. Nous rappelons ici les définitions et les représentations de ces fonctions.

a) Fonction scalaire d'un tenseur.

Soit A un tenseur de composante A^{ij} dans la base orthonormée $\vec{e}_i$; $f(A)$, fonction à valeur scalaire ψ , est une fonction des n^2 variables A_{ij} (ou des $\frac{n(n+1)}{2}$ variables si A est symétrique.

La forme de son expression en fonction des composantes dépend du choix de la base utilisée, ce que l'on peut noter

$$\psi = f(A) = f(A^{ij}, \vec{e}_i) = f(A^{*ij}, \vec{e}_i^{*}) \qquad (5.1)$$

A^{*ij} étant les composantes du tenseur A dans la base $\vec{e}_i^{*}$.

Dans le cas où la forme de cette fonction, comme fonction des composantes, est la même dans toutes les bases reliées par une transformation orthogonale, la fonction $f(A)$ est appelée un "invariant orthogonal", ou plus simplement, un invariant de A.

Soit par exemple la fonction $f(A^{ij}, \vec{e}_i) = a_o + a_{ij} A^{ij}$, où les a_{ij} sont des constantes. Si on considère cette relation dans la base $\vec{e}_i^{*}$

$$f(A^{*ij}, \vec{e}_i^{*}) = a^{*}_{o} + a^{*}_{ij} \cdot A^{*ij} \qquad (5.2)$$

avec $a^{*}_{o} = a_o$

$a^{*}_{ij} = Q_i{}^{l} a_{lm} Q^{m}{}_{j}$

Puisque, en général, les coefficients a^*_{ij} diffèrent des coefficients a_{ij}, on voit bien que la forme de f dépendra de la base utilisée.

$f(A)$ ne sera donc un invariant que si $a^*_{ij} = a_{ij}$. Ces résultats se généralisent pour une fonction scalaire de plusieurs tenseurs $f(A, B,...)$. L'expression "invariants simultanés" est alors utilisée.

La fonction $f(A, B,...)$ est dite isotrope si, pour tout tenseur orthogonal Q, et pour tous les tenseurs A, B, on a la relation

$$f(A, B,...) = f(Q\,A, Q^T, Q\,B\,Q^T,...) \qquad (5.3)$$

On peut montrer l'équivalence de l'invariance de la forme fonctionnelle et de l'isotropie.

La représentation des invariants simultanés a été principalement étudiée pour les tenseurs symétriques [40] [42] [29].

La fonction scalaire $\Psi = f(A)$, où A est symétrique du second ordre, peut être exprimée par une fonction des trois invariants indépendants de A :

$$\text{tr } A, \quad \text{tr } A^2, \quad \text{tr } A^3 \qquad (5.4)$$

Si f est un invariant simultané des deux tenseurs symétriques A et B il faut ajouter à (4) les invariants $\text{tr}(B)$, $\text{tr}(B^2)$, $\text{tr}(B^3)$, $\text{tr}(A.B)$,

$$\text{tr}(A.B^2),\ \text{tr}(A^2.B),\ \text{tr}(A^2.B^2) \qquad (5.5)$$

Plus généralement, si $f = f(A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(r)})$, on pourra l'exprimer par une fonction des $6r - 2$ invariants obtenus en ajoutant à la liste (4) + (5) les $6r - 12$ invariants :

$$\text{tr}(A_{(e)}),\ \text{tr}(A_{(1)}.A_{(e)}),\ \text{tr}(A^2_{(1)}.A_{(e)})$$

$$\text{tr}(A_{(2)}.A_{(e)}),\ \text{tr}(A_{(1)}.A_{(2)}.A_{(e)}),\ \text{tr}(A^2_{(1)}.A_{(2)}.A_{(e)}) \ldots$$

avec $e = 3, 4 \ldots r$.

b) Fonction tensorielle d'un tenseur.

Le tenseur S est fonction tensorielle du tenseur A si ses n^2 composantes S^{ij} (ou $\frac{n(n+1)}{2}$ composantes si S est symétrique) sont fonction des n^2 (ou $\frac{n(n+1)}{2}$) variables A^{ij} qui sont les composantes de A dans $(O, \vec{e}_i)$

$$S = f(A) \quad \text{ou} \quad S^{ij} = f^{ij}(A^{pq}, \vec{e}_i) \tag{5.7}$$

Dans une autre base $\vec{e}^{\times}_i$, la forme des fonctions $f^{\times}_{ij}$ sera en général différente de la forme f_{ij} dans $\vec{e}_i$. Dans le cas où les formes de ces fonctions sont identiques, on dit que la fonction $S = f(A)$ est une fonction tensorielle invariante par la transformation R faisant passer de la base $\vec{e}_i$ à $\vec{e}^{\times}_i$ $R.R^T = I$.

Cette définition se généralise au cas où S est fonction de plusieurs tenseurs $A_{(i)}$.

Soit Q un tenseur orthogonal ; on dit que $S = f(A)$ est une fonction tensorielle isotrope si S et A sont "tournées de la même façon" par Q c'est-à-dire si

$$Q\, f(A)\, Q^t = f(Q\, A\, Q^t) \tag{5.8}$$

Si S était fonction de plusieurs tenseurs $A_{(i)}$, cette fonction tensorielle serait isotrope si

$$Q\, f(A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots A_{(r)})\, Q^t = f(QT_{(1)}\, Q^t,\ QT_{(2)} Q^t \ldots, QT_{(r)} Q^t) \tag{5.9}$$

pour tout tenseur orthogonal Q et tout $A_{(i)}$.

On montre également pour une fonction tensorielle l'équivalence de l'invariance dans un changement de base et de l'isotropie.

La représentation des fonctions isotropes a été également étudiée par RIVLIN et ERICKSEN [29], WINEMAN et PIPKIN [42].

Si A est symétrique, S = f(A) a la représentation

$$S = \psi_{(o)} + \psi_{(1)} A + \psi_{(2)} A^2 \qquad (5.10)$$

où $\psi_{(o)}$, $\psi_{(1)}$, $\psi_{(2)}$ sont des fonctions scalaires de A

$$\psi_{(i)} = \psi_{(i)}(A)$$

Pour une fonction de deux tenseurs S = f (A,B), la représentation a la forme :

$$\begin{aligned} S = {} & \psi_0 \delta + \psi_1 A + \psi_2 B + \psi_3 A^2 + \psi_4 B^2 \\ & + \psi_5 (AB + BA) + \psi_6 (A^2B + BA^2) \\ & + \psi_7 (AB^2 + B^2A) + \psi_8 (A^2 B^2 + B^2 A^2) \end{aligned} \qquad (5.11)$$

où les ψ_i sont des fonctions scalaires de A et B.

De plus, si S est une fonction isotrope polynomiale de A et B, c'est-à-dire que les composantes de S sont des expressions polynomiales des composantes de A et B, on montre que les coefficients $\psi_{(i)}$ sont des polynomes des invariants de base de A et B.

DEUXIEME PARTIE

COMPORTEMENT RIGIDE-PLASTIQUE

- PLASTICITE PARFAITE
- ECROUISSAGE EN DENSITE.

I- INTRODUCTION.

Depuis de nombreuses années, et en particulier depuis les travaux de SOKOLOWSKI [33], la théorie de la plasticité a été appliquée en mécanique des sols au calcul de la charge limite que pouvait supporter un sol : fondation, murs de soutènement, ancrage... Le sol est considéré comme un matériau rigide plastique, obéissant au critère de COULOMB.

La détermination du champ statique peut être obtenue pour les problèmes bidimensionnels et de symétrie axiale, indépendamment du champ cinématique, ce qui conduit à une indétermination du champ statique : plusieurs solutions statiquement admissibles peuvent être proposées comme solutions d'un problème de données frontières en contraintes. Ceci n'a rien d'étonnant puisque seule une relation entre contraintes est employée comme loi de comportement. La théorie des charges limites perd alors beaucoup de son intérêt puisque le calcul du seul champ statique ne permet de calculer que la borne inférieure de la charge limite.

La détermination du champ cinématique exige la connaissance de la loi complète de déformation plastique des sols, et jusqu'à ce jour, aucune théorie satisfaisante ne peut être retenue. La démarche la plus simple, quand on a voulu étendre la théorie des charges limites aux sols, a été de généraliser les théories qui semblaient alors bien établies pour les métaux. Cette généralisation a été faite par DRUCKER et PRAGER [11] . La loi de déformation obtenue à partir de la théorie du "potentiel plastique", où la vitesse de déformation est normale à la surface limite, conduit à une augmentation de volume du sol proportionnelle à l'angle de frottement interne du matériau. Si on constate bien une augmentation de volume au début de l'écoulement plastique, quand la densité du matériau est supérieure à la densité critique, sa grandeur dépend principalement du rapport de la densité actuelle à la densité critique : en conséquence, la loi proposée ne paraît pas acceptable.

La théorie de la plasticité parfaite représente un comportement idéalisé du matériau ; quand l'écoulement se poursuit, les propriétés du matériau sont modifiées par l'écoulement : il faut alors avoir recours à une théorie de l'écrouissage.

Dans les chapitres II, III et IV, nous n'envisageons que le comportement rigide-parfaitement plastique. Nous verrons que la surface limite et la loi de déformation plastique apparaissent comme une conséquence de la définition du comportement plastique que nous avons adoptée [30], [31].

Cette approche du comportement rigide - parfaitement plastique à partir d'une seule relation tensorielle entre $\underline{\sigma}$ et $\underline{d}$ est voisine de celle proposée par THOMAS [38]. La définition adoptée et développée par cet auteur dans le cas d'une relation linéaire est difficile à utiliser dans le cas général.

Le comportement rigide-plastique peut être facilement élargi pour décrire un comportement élasto-plastique : il suffirait d'ajouter, selon la méthode PRANDTL-REUSS , les déformations élastiques.

Les théories classiques proposées antérieurement postulaient l'existence d'une surface limite à laquelle on associait une loi de déformation. Rappelons brièvement les définitions qui sont actuellement proposées pour définir le comportement plastique.

Postulat de DRUCKER et ILIUSHIN.

Considérons un corps en équilibre sous l'action d'un système de force $\vec{f}$. Appliquons graduellement à ce corps un système de forces supplémentaires $\Delta\vec{f}$, puis supprimons-le. Le travail du système $\Delta\vec{f}$ pendant le cycle doit être >0 pour un matériau écrouissable "stable", négatif pour un matériau "instable", et nul dans le cas où les déformations sont purement élastiques ou pour un chargement neutre. Ce postulat a été à la base des travaux concernant la théorie de la plasticité au cours de ces dix dernières années. On peut en déduire la convexité de la surface limite et la normalité à la surface limite de la vitesse de déformation plastique. Ces conclusions sont correctes sous l'hypothèse que la déformation plastique n'entraîne aucune modification des propriétés élastiques du matériau.

Pour la définition de la plasticité parfaite, l'emploi du postulat de DRUCKER est beaucoup plus délicat : le cas de plasticité parfaite est traité comme correspondant à un chargement neutre, ce qui n'a pas de signification en plasticité parfaite. Il indique d'autre part que le travail pendant le "cycle" est nul. Le postulat de DRUCKER n'est pas une condition d'irréversibilité du processus de déformation plastique ; il doit être considéré comme une hypothèse particulière que satisfont certains matériaux. [50]

ILIUSHIN [17] établit un autre postulat de plasticité à partir de considérations énergétiques. Il considère un cycle fermé en déformation ABA dans l'espace des déformations. Le passage de A à B est accompagné de déformation plastique si le travail des forces extérieures pendant le cycle ABA est > 0. Si ce travail est nul, les déformations sont de nature élastique. Le travail mis en jeu W_D dans le cycle en déformation est supérieur au travail dans un cycle en contrainte W_C. On peut en conclure que le postulat de plasticité d'ILIUSHIN est moins restrictif que celui de DRUCKER - PALMER - MAIER - DRUCKER [3].

Il apparaît qu'actuellement les fondements de la théorie de la plasticité n'ont pas encore été bien établis. La plasticité décrivant des déformations qui sont par définition irréversibles, on peut espérer que la thermodynamique des processus irréversibles, appliquée à la mécanique des milieux continus, permettra d'obtenir une théorie unifiée de la plasticité. Bien qu'une telle unification n'apparaisse pas probable dans un proche avenir, il est possible de construire le début de cette théorie. L'étude des relations tensorielles entre les champs dynamique et cinématique permet en effet de déterminer le nombre et la forme des fonctions scalaires entrant dans les équations de comportement.

II- DEFINITION DU COMPORTEMENT PARFAITEMENT PLASTIQUE.

Le modèle du corps idéal rigide-plastique peut être illustré par le diagramme de charge, suggéré par PRANDTL, correspondant à une sollicitation monoaxiale : pour une contrainte inférieure au seuil σ_o, le matériau a un comportement rigide ; dès que la contrainte atteint la valeur σ_o, le corps se déforme indéfiniment si cette contrainte est maintenue. Ce schéma, généralisé dans l'espace des contraintes, conduit à la notion de surface limite : il n'y a écoulement plastique que si l'état de contrainte est représenté par un point sur la surface limite ; la grandeur de la déformation est indéterminée, ce qui veut dire qu'il n'existe pas de correspondance biunivoque entre l'état de contrainte et la déformation.

Pour un corps parfaitement plastique, en écoulement, le mouvement du matériau sera décrit par la vitesse de chaque particule P : v (P, t). Les tenseurs cinématiques décrivant le mouvement du corps sont le tenseur vitesse de déformation $\underset{\sim}{d}$, dont les composantes en repère orthonormé sont $d_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$, et le tenseur vitesse de rotation $\underset{\sim}{\omega}$, $\omega_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i})$. La loi de comportement de plasticité parfaite reliera le tenseur contrainte $\underset{\sim}{\sigma}$ aux tenseurs décrivant la cinématique de l'écoulement : nous supposerons que cette relation est explicite.

En axes rhéologiques, la loi s'exprimera par une relation de la forme $\underset{\sim}{\sigma} = f(\underset{\sim}{d})$, puisque, par définition des axes rhéologiques, $\underset{\sim}{\dot{\omega}}$ se réduit à un tenseur identiquement nul.

Si on choisit d'écrire la loi dans un repère orthonormé quelconque $(0, \vec{e}_i)$, on peut penser qu'elle s'écrive $\underset{\sim}{\sigma} = f(\underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{\dot{\omega}})$. Une telle loi est en contradiction avec le principe d'objectivité. En effet, si nous considérons un second repère $(0, \vec{e}_i^*)$ en rotation par rapport au premier, les composantes des différents tenseurs intervenant dans la loi se transforment dans le changement de repère défini par la rotation $Q : Q.Q^T = I$.

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\sigma}^* &= Q \ \underset{\sim}{\sigma} \ Q^T \\ \underset{\sim}{d}^* &= Q \ \underset{\sim}{d} \ Q^T \\ \underset{\sim}{\dot{\omega}}^* &= Q \ \underset{\sim}{\dot{\omega}} \ Q^T + \dot{Q} \ Q^T \end{aligned} \qquad (2.1)$$

La loi de comportement doit vérifier :

$$f(\underset{\sim}{d}^*, \underset{\sim}{\dot{\omega}}^*) = f(Q \ \underset{\sim}{d} \ Q^T, \ Q \ \underset{\sim}{\dot{\omega}} \ Q^T + \dot{Q} \ Q^T) = Q \ f(\underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{\dot{\omega}}) Q^T \qquad (2.2)$$

pour tout Q et $\dot{Q}$.

On voit alors que si on prend $Q = I$, et $\dot{Q} \neq 0$, la relation conduit à

$$f(\underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{\dot{\omega}} + \dot{Q}) = f(\underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{\dot{\omega}}) \qquad (2.3)$$

La fonction f ne doit donc pas dépendre de $\dot{\omega}$, qui est une grandeur non objective.

Le principe d'objectivité impose donc à la fonction f de vérifier la relation :

$$Q \ f(\underset{\sim}{d}) \ Q^T = f(Q \ \underset{\sim}{d} \ Q^T) \qquad (2.4)$$

$f(\underset{\sim}{d})$ doit donc être une fonction tensorielle isotrope. Elle admettra donc la représentation générale indiquée en (A,5.10) :

$$\underset{\sim}{\sigma} = \psi_0 \underset{\sim}{\delta} + \psi_1 \ \underset{\sim}{d} + \psi_2 \ \underset{\sim}{d}^2 \qquad (2.5)$$

Dans la définition d'un comportement parfaitement plastique, tout effet de viscosité doit être exclu. Le temps, considéré comme une grandeur physique, n'intervient pas dans les équations : il est utilisé comme paramètre pour repérer les états de déformation successifs du matériau.

La relation (2.5) liant les grandeurs dynamiques et cinématiques ne définira un comportement plastique qu'à la condition d'être homogène et de degré zéro par rapport au temps. Le paramètre temps entrant dans la loi de comportement par l'intermédiaire du tenseur $\underset{\sim}{d}$, on est conduit à demander pour la relation $\underset{\sim}{\sigma} = f(\underset{\sim}{d})$ l'homogénéité de degré zéro par rapport aux composantes du tenseur $\underset{\sim}{d}$:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial d_{kl}} d_{kl} = 0 \qquad (2.6)$$

Il en résulte que le tenseur $\underset{\sim}{\sigma}$ déterminera le tenseur $\underset{\sim}{d}$ seulement à un facteur arbitraire près. On retrouve le postulat de plasticité parfaite introduit par THOMAS [3 8] , "La relation $\underset{\sim}{\sigma} = f(\underset{\sim}{d})$ n'établit pas une correspondance biunivoque entre les tenseurs $\underset{\sim}{d}$ et $\underset{\sim}{\sigma}$ ". On voit donc bien la distinction qui existe entre le comportement parfaitement plastique et le comportement visqueux où une relation biunivoque entre la contrainte et la vitesse de déformation existe.

La définition de THOMAS [3 8] conduit à une équation aux dérivées partielles pour les trois fonctions des invariants de $\underset{\sim}{d}$. A partir des solutions de cette équation, la dépendance qui existe entre les invariants du tenseur contrainte peut être obtenue. Cette démarche n'est exploitable que dans le cas particulier où la loi de plasticité parfaite peut se définir par une seule fonction inconnue, par exemple dans l'hypothèse d'un critère indépendant de la pression moyenne et de proportionnalité entre les déviateurs de $\underset{\sim}{d}$ et $\underset{\sim}{\sigma}$. C'est précisément le cas étudié par THOMAS.

La définition que nous adoptons, à savoir que "la loi de comportement d'un matériau idéal, parfaitement plastique, est définie par la relation générale (2.5), sous la condition fondamentale d'homogénéité de degré zéro par rapport au temps", permet l'étude du cas général : relation non linéaire et variation de volume. Cette définition conduit immédiatement à la notion de surface limite. Nous n'envisageons ici que le comportement plastique susceptible d'être décrit par la forme analytique (2.5).

Remarquons que puisque les tenseurs $\underset{\sim}{d}$ et $\underset{\sim}{d}^2$ ont mêmes axes principaux, il en sera de même pour les tenseurs $\underset{\sim}{d}$ et $\underset{\sim}{\sigma}$, puisque les fonctions ψ_i de la relation (2.5) sont des fonctions à valeurs scalaires. Les fonctions ψ_i sont pour l'instant des fonctions inconnues dont a priori nous ne connaissons pas la grandeur. On ne peut donc considérer les termes non linéaires $d_{ij} \cdot d_{jk}$ comme négligeables, même si les déformations sont infinitésimales.

III- EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA LOI.

La loi de comportement pour l'écoulement plastique est définie par la relation :

$$\sigma_{ij} = \psi_o \, \delta_{ij} + \psi_1 \, d_{ij} + \psi_2 \, d_{ik} \, d_{kj} \tag{3.1}$$

Introduisons les déviateurs

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \, \delta_{ij} \, \sigma_{kk} \\ \bar{d}_{ij} &= d_{ij} - \frac{1}{3} \, \delta_{ij} \, d_{kk} \end{aligned} \tag{3.2}$$

La relation (3.1) se décompose en partie isotrope et déviatoire

$$\sigma_{ii} = 3 \, \psi_o + \psi_1 \, d_{ii} + \psi_2 \, d_{ik} \, d_{ki} \tag{3.3}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \left(\psi_1 + \frac{2}{3} \, \psi_2 \, d_{ii} \right) \bar{d}_{ij} + \psi_2 \left(\bar{d}_{ik} \cdot \bar{d}_{kj} - \frac{1}{3} \, \delta_{ij} d_{kl} d_{kl} \right) \tag{3.4}$$

Choisissons comme invariants de base du tenseur $\underset{\sim}{d}$ les trois invariants linéairement indépendants :

$$\begin{aligned} E_1 &= d_{ii} \\ (\bar{E}_2)^2 &= \bar{d}_{ij} \, \bar{d}_{ij} \\ (\bar{E}_3)^3 &= \bar{d}_{ik} \, \bar{d}_{kj} \, \bar{d}_{ji} \end{aligned} \tag{3.5}$$

L'invariant $(E_2)^2 = d_{kl} \, d_{lk}$ s'exprime au moyen de E_1 et $\bar{E}_2$:

$$(E_2)^2 = (\bar{E}_2)^2 + \frac{E_1^2}{3} \tag{3.6}$$

Les relations (3.3) et (3.4) s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= 3\,\phi_o \\ \bar{\sigma}_{ij} &= \phi_1\,\bar{d}_{ij} + \phi_2\,(\bar{d}_{ik}\,\bar{d}_{kj} - \tfrac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\bar{E}_2^{\,2}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

où on a posé, pour simplification :

$$\begin{aligned} \phi_o &= \psi_o + \psi_1\,\frac{E_1}{3} + \frac{\psi_2}{3}\,(\bar{E}_2^{\,2} + \frac{E_1^{\,2}}{3}) \\ \phi_1 &= \psi_1 + \frac{2}{3}\,\psi_2\,E_1 \\ \phi_2 &= \psi_2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Les fonctions ϕ_i sont des fonctions scalaires des seuls invariants (3.5).

a) Forme invariante.

Les tenseurs $\underset{\sim}{d}$ et $\underset{\sim}{\sigma}$ étant coaxiaux, la relation (2.5) sera équivalente à trois relations scalaires reliant les invariants de $\underset{\sim}{\sigma}$ aux invariants de $\underset{\sim}{d}$. Les invariants de $\underset{\sim}{\sigma}$ seront choisis semblables à ceux de $\underset{\sim}{d}$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sigma_{ii} \\ (\bar{S}_2)^2 &= \bar{\sigma}_{ij}\,\bar{\sigma}_{ij} \\ (\bar{S}_3)^3 &= \bar{\sigma}_{ij}\,\bar{\sigma}_{jk}\,\bar{\sigma}_{ki} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Les relations (3.7) conduisent à :

$$\begin{aligned} S_1 &= 3\,\phi_o \\ \bar{S}_2^{\,2} &= \phi_1^{\,2}\,\bar{E}_2^{\,2} + 2\,\phi_1\,\phi_2\,\bar{E}_3^{\,3} + \tfrac{1}{6}\,\phi_2^{\,2}\,\bar{E}_2^{\,4} \\ \bar{S}_3^{\,3} &= \phi_1^{\,3}\,\bar{E}_3^{\,3} + \tfrac{1}{2}\,\phi_1\,\phi_2\,\bar{E}_2^{\,2}(\phi_1\,\bar{E}_2^{\,2} + \phi_2\,\bar{E}_3^{\,3}) + \tfrac{1}{3}\,\phi_2^{\,3}(\bar{E}_3^{\,6} - \tfrac{1}{12}\,\bar{E}_2^{\,6}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

b) Condition d'homogénéité.

L'analyse dimensionnelle des relations (3.7) montre que les fonctions ϕ_o, ϕ_1 et ϕ_2 doivent être de degré zéro, 1 et 2 par rapport au temps, c'est-à-dire de degré 0, -1, et -2 par rapport aux vitesses de déformation.La condition d'homogénéité qui définit le comportement plastique à partir de la relation (2.5) impose aux fonctions ϕ_i, dont les arguments sont les seuls invariants (3.5), d'être homogènes et de degré $-i$ par rapport aux invariants E_1, $\overline{E}_2$ et $\overline{E}_3$ de $\underline{d}$. Cette condition conduit, par application du théorème d'EULER relatif aux fonctions homogènes, en supposant que les fonctions ϕ_i admettent des dérivées partielles continues aux relations :

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial E_1} E_1 + \frac{\partial \phi_n}{\partial \overline{E}_2} \overline{E}_2 + \frac{\partial \phi_n}{\partial \overline{E}_3} \overline{E}_3 + n \phi_n = 0 \qquad n = 0, 1, 2 \tag{3.11}$$

Chacune de ces relations va nous permettre d'exprimer les fonctions ϕ_i au moyen de deux variables indépendantes adimensionnelles

$$s = \frac{\overline{E}_3}{\overline{E}_2} \qquad \text{et} \qquad t = \frac{E_1}{\overline{E}_2} \tag{3.12}$$

Les équations (3.11) admettent alors pour solution

$$\phi_o = A\,(s,\, t) \qquad \phi_1 = B\,(s,t)\,\frac{1}{\overline{E}_2} \qquad \phi_2 = C(s,t)\,\frac{1}{\overline{E}_2^{\,2}} \tag{3.13}$$

où A, B et C sont trois fonctions indépendantes des variables indépendantes s et t.

c) Surface limite.

La substitution de (3.13) dans (3.10) conduit à :

$$\begin{aligned} S_1 &= 3\,A \\ \overline{S}_2^{\,2} &= (B + C\ s^3)^2 + \frac{C^2}{6}\,(1 - 6\,s^6) \\ \overline{S}_3^{\,3} &= s^3\,(B + C\,s^3)^3 + \frac{C}{2}\,(1 - 6\,s^6)\left[\, B(B + C\,s^3) - \frac{1}{18}\,C^2(1 - 6\,s^6)\,\right] \end{aligned} \tag{3.14}$$

Remarquons alors que les trois invariants de $\underset{\sim}{\sigma}$ s'expriment au moyen de deux paramètres seulement s et t. Si les fonctions A, B et C sont données, l'élimination de s et t entre les relations (3.14), qui en général est possible, conduit à une relation entre les seuls invariants de $\underset{\sim}{\sigma}$: $F\ (S_1\ ,\ \overline{S}_2^{\,2}\ ,\ \overline{S}_3^{\,3}) = 0.$ (3.15)

Si la surface ainsi obtenue satisfait à certaines conditions de régularité, elle peut être interprétée comme la surface limite de plasticité dans l'espace des invariants de $\underset{\sim}{\sigma}$.

En conséquence, la relation (3.1), jointe à la condition d'homogénéité, ne peut être appliquée et n'a de sens que si l'état de contrainte vérifie la relation (3.15). On peut alors compléter la loi du matériau en admettant un comportement rigide pour les états de contrainte intérieurs à la surface limite (3.15), un état de contrainte représenté par un point extérieur à cette surface ne pouvant être atteint.

Remarquons que la condition (3.11) a pour conséquence que le déterminant fonctionnel du système (3.10) est nul : $\left| \frac{\partial \overline{S}_i}{\partial E_j} \right| = 0$. (3.16)

Il en résulte qu'une relation lie les invariants S_1, $\overline{S}_2$ et $\overline{S}_3$. On retrouve la définition de plasticité parfaite formulée par THOMAS : "Aucune correspondance biunivoque existe entre les invariants des tenseurs cinématiques et dynamiques". La condition d'homogénéité que nous avons imposée donne en plus la forme des fonctions ϕ_i par les relations (3.13).

Remarquons que les relations (3.14) sont les équations paramètriques de la surface limite. A tout point de la surface est attaché le couple des valeurs de s et t, déterminant ainsi parfaitement la direction de la vitesse de déformation en chaque point de la surface. La déformation à volume constant $E_1 = 0$ ne peut donc avoir lieu que si l'état de contrainte est représenté par un vecteur dont l'extrêmité est sur la courbe $t = 0$ tracée sur la surface limite. En tout autre point de la surface limite, la déformation plastique est accompagnée d'une variation de volume qui dépendra évidemment de la forme des fonctions A, B et C.

Le cas général d'incompressibilité (quel que soit l'état de contrainte sur la surface limite), qui est l'hypothèse physique généralement admise, peut être obtenu comme un cas dégénéré des relations (3.14). Dans cette hypothèse, les seules variables cinématiques sont $\overline{E}_2$ et $\overline{E}_3$, et les relations (3.14) ne dépendent plus que

d'une seule variable $s = \frac{\bar{E}_3}{\bar{E}_2}$. Les relations (3.14) représentent la courbe $t = 0$, et non une surface limite. L'hypothèse d'incompressibilité peut alors être couplée avec celle d'un critère d'écoulement indépendant de la pression moyenne. La fonction A est indéterminée, et la loi de comportement n'est donnée que par une relation entre les déviateurs $\underset{\sim}{\bar{\sigma}}$ et $\underset{\sim}{\bar{d}}$.

Remarquons enfin que se donner la surface limite $F(S_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3) = 0$ dans l'espace des invariants (3.9) revient à se donner une relation entre les trois fonctions A, B et C : $G(A, B, C) = 0$. Pour une même surface limite, nous avons un double choix possible pour deux fonctions. Evidemment les lois de déformation sont différentes.

d) Loi de déformation.

La loi de déformation plastique sera obtenue en portant les relations (3.13) dans (3.7) :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{B}{\bar{E}_2}\,\bar{d}_{ij} + \frac{C}{\bar{E}_2^{\,2}}\left(\bar{d}_{ik}\,\bar{d}_{kj} - \delta_{ij}\,\frac{\bar{E}_2^{\,2}}{3}\right) \tag{3.17}$$

et en résolvant (3.17) par rapport à $\bar{d}_{ij}$.

De (3.17) on obtient :

$$\bar{\sigma}_{ik}\,\bar{\sigma}_{kj} = \frac{1}{9}C^2\,\delta_{ij} - \frac{2}{3}\frac{C.B}{\bar{E}_2}\,\bar{d}_{ij} + \left(\frac{B^2}{\bar{E}_2^{\,2}} - \frac{2}{3}\,\frac{C^2}{\bar{E}_2^{\,2}}\right)\bar{d}_{ik}\,\bar{d}_{kj} \tag{3.18}$$

$$+ \frac{2\,BC}{\bar{E}_2^{\,3}}\,\bar{d}_{ik}\,\bar{d}_{kl}\,\bar{d}_{lj} + \frac{C^2}{\bar{E}_2^{\,4}}\,\bar{d}_{ik}\,\bar{d}_{kl}\,\bar{d}_{lm}\,\bar{d}_{mj}$$

Les quantités $\underset{\sim}{\bar{d}}^3$ et $\underset{\sim}{\bar{d}}^4$ peuvent être obtenues en fonction de $\underset{\sim}{\bar{d}}$, $\underset{\sim}{\bar{d}}^2$ par la relation de CALLEY-HAMILTON:

$$\underset{\sim}{\bar{d}}^3 = \underset{\sim}{\delta}\,\frac{\bar{E}_3^{\,3}}{3} + \frac{1}{2}\,\underset{\sim}{\bar{d}}\,\bar{E}_2^{\,2}$$

$$\underset{\sim}{\bar{d}}^4 = \underset{\sim}{\bar{d}}\,\frac{\bar{E}_3^{\,3}}{3} + \underset{\sim}{\bar{d}}^2\,\frac{\bar{E}_2^{\,2}}{2} \tag{3.19}$$

Compte tenu de (3.17), la relation (3.18) donne :

$$\bar{d}_{ij} = \lambda \left[\bar{\sigma}_{ij} - \frac{6\,C}{6\,B^2 - C^2} \left(\bar{\sigma}_{ik}\,\bar{\sigma}_{kj} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\bar{S}_2^{\,2} \right) \right] \qquad (3.20)$$

avec

$$\lambda = \bar{E}_2 \left[B - \frac{2\,C^2\,(B + C\,s^3)}{6\,B^2 - C^2} \right]^{-1} \qquad (3.21)$$

Quant à la loi de variation de volume, elle est donnée par la valeur du paramètre t.

On remarque dans les relations (3.20) que pour un état de traction (ou de compression) $\bar{\sigma}_1 = -\bar{\sigma}_2 = -\bar{\sigma}_3$, on a $\bar{d}_1 = -\bar{d}_2 = -\bar{d}_3$. Les vecteurs $\bar{\sigma}$ et $\bar{d}$ sont alors proportionnels et $s^3 = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$. Pour tout autre état de contrainte (par exemple un état de cisaillement pur $\bar{\sigma}_1 = -\bar{\sigma}_3$ $\bar{\sigma}_2 = 0$), il y a une déviation entre les vecteurs représentant $\bar{\sigma}$ et $\bar{d}$ ($\bar{d}_2 \neq 0$, $\bar{d}_3 \neq -\bar{d}_1$), excepté le cas où la relation est linéaire (C = 0). Dans ce cas, il y a toujours proportionnalité entre les déviateurs de $\bar{\sigma}$ et $\bar{d}$. Le paramètre $s = \frac{\bar{E}_3}{\bar{E}_2}$ est alors égal au rapport $\frac{\bar{S}_3}{\bar{S}_2}$. Les courbes s = cte sont alors les intersections de la surface limite avec des plans passant par l'axe hydrostatique S_1.

e) Autre choix possible de variables cinématiques.

Dans l'analyse précédente, les variables dynamiques et cinématiques étaient les invariants définis par (3.5) et (3.9). Ce choix n'est pas unique. On peut conduire la même analyse en choisissant comme variable toute combinaison des invariants (3.5) et (3.9) linéairement indépendante. Nous pensons cependant que le choix que nous avons fait est en général le plus simple, puisqu'il conduit, comme nous le verrons, à une expression très simple pour la fonction dissipation.

Il peut se présenter des cas où la loi de plasticité a son expression la plus simple en employant comme variables indépendantes les valeurs principales des tenseurs d et σ. La loi étant décomposable en partie isotrope et déviatoire, nous pouvons formuler le problème avec les variables E_1, $\bar{d}_1$, $\bar{d}_3$ et S_1, $\bar{\sigma}_1$ et $\bar{\sigma}_3$:

$$S_1 = 3\,\phi_o \qquad (3.22)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \phi_1\,\bar{d}_{ij} + \phi_2\,(\bar{d}_{ik}\,\bar{d}_{kj} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,\bar{d}_{k1}\,\bar{d}_{k1})$$

Les relations analogues à (3.10) sont alors :

$$S_1 = 3\,\phi_o$$

$$\bar{\sigma}_1 = \phi_1\,\bar{d}_1 + \phi_2\,\frac{\bar{d}_1^{\,2} - 2\,(\bar{d}_3^{\,2} + \bar{d}_1\,\bar{d}_3)}{3} \qquad (3.23)$$

$$\bar{\sigma}_3 = \phi_1\,\bar{d}_3 + \phi_2\,\frac{1}{3}\,(\bar{d}_3^{\,2} - 2\,(\bar{d}_1^{\,2} + \bar{d}_1\,\bar{d}_3))$$

La condition d'homogénéité imposera :

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial E_1}\,E_1 + \frac{\partial \phi_n}{\partial d_1}\,\bar{d}_1 + \frac{\partial \phi_n}{\partial d_3}\,\bar{d}_3 + n\,\phi_n = 0 \qquad (3.24)$$

$$n = (0,\ 1,\ 2)$$

En posant $s' = \frac{\bar{d}_3}{\bar{d}_1}$ et $t' = \frac{E_1}{\bar{d}_1}$, les équations (3.24) admettent pour solution :

$$\phi_o = A(s',\ t') \qquad \phi_1 = B(s',t')\,\frac{1}{\bar{d}_1} \qquad \phi_2 = C\,(s',t')\,\frac{1}{\bar{d}_1^{\,2}} \qquad (3.25)$$

On obtient alors des relations analogues à (3.14) :

$$S_1 = 3\,A$$

$$\bar{\sigma}_1 = B + \frac{C}{3\,\bar{d}_1^{\,2}}\,(\bar{d}_1^{\,2} - 2(\bar{d}_3^{\,2} + \bar{d}_1\,\bar{d}_3) = B + \frac{C}{3}\,(1 - 2\,(s'^2 + s')) \qquad (3.26)$$

$$\bar{\sigma}_3 = \frac{B}{\bar{d}_1} + \frac{C}{3\,\bar{d}_1^{\,2}}\,(\bar{d}_3^{\,2} - 2(\bar{d}_1^{\,2} + \bar{d}_1\,\bar{d}_3) = Bs' + \frac{C}{3}\,(s'^2 - 2(1 + s'))$$

L'élimination de s' et t' entre les équations (3.26) donne l'équation de la surface limite :

$$f\ (S_1,\ \bar{\sigma}_1,\ \bar{\sigma}_3) = 0 \qquad (3.27)$$

L'inversion des relations (3.22) donne :

$$\bar{d}_{ij} = \lambda \left[\bar{\sigma}_{ij} - \frac{6\, C\, \bar{d}_1^{\,2}}{6\, B^2\, \bar{d}_1^{\,2} - \bar{E}_2^{\,2}\, C^2} \left(\bar{\sigma}_{ik}\, \bar{\sigma}_{kj} - \frac{1}{3}\, \delta_{ij}\, \bar{S}_2^{\,2} \right) \right] \tag{3.28}$$

avec :

$$\lambda = \frac{\bar{d}_1}{B - \frac{2\, C^2}{\bar{d}_1} \left(\frac{C\, \bar{E}_3^{\,3} + B\, \bar{E}_2^{\,2}\, \bar{d}_1}{6\, B^2 \bar{d}_1^{\,2} - C^2\, \bar{E}_2^{\,2}} \right)}$$

ou en remarquant que

$$\begin{aligned} \bar{E}_2^{\,2} &= 2\, (\bar{d}_1^{\,2} + \bar{d}_1\, \bar{d}_3 + \bar{d}_3^{\,2}) \\ \bar{E}_3^{\,3} &= -3\, (\bar{d}_1^{\,2}\, \bar{d}_3 + \bar{d}_3^{\,2}\, \bar{d}_1) \end{aligned} \tag{3.29}$$

on obtient :

$$\bar{d}_{ij} = \lambda \left[\bar{\sigma}_{ij} - \frac{6\, C}{6\, B^2 - 2\, C^2\, (1 + s' + s'^2)} \left(\bar{\sigma}_{ik} \bar{\sigma}_{kj} - \frac{1}{3}\, \delta_{ij}\, \bar{S}_2^{\,2} \right) \right] \tag{3.30}$$

avec :

$$\lambda = \frac{\bar{d}_1}{B - C^2\, \frac{2B\, (1 + s' + s'^2) - 3C\, (s' + s'^2)}{3\, B^2 - C^2\, (1 + s' + s'^2)}}$$

IV- FONCTION DISSIPATION.

Les principes de la thermodynamique doivent être satisfaits par toutes les lois de la nature. On peut donc penser que l'application de ces principes peut contribuer au choix des fonctions inconnues qui entrent dans les lois de comportement.

Le premier principe peut être considéré comme le principe de conservation de l'énergie : il est applicable aux processus réversibles et irréversibles, mais ne donne aucune indication supplémentaire.

Le deuxième principe introduit la fonction entropie S comme une fonction d'état. La variation d'entropie est due à des échanges de chaleur entre le système et l'extérieur, $\frac{d\,S_e}{dt}$, ainsi qu'à une production d'entropie à l'intérieur du système, $\frac{d\,S_i}{dt}$, résultant d'un processus irréversible
La seconde loi impose à $\frac{d\,S_i}{dt}$ d'être positif ou nul si le processus est irréversible ou non.

Si q_i est le flux de chaleur à travers la frontière du système, et si θ désigne la production d'entropie d'origine non mécanique par unité de volume à l'intérieur du système, l'augmentation totale d'entropie est donnée par :

$$\frac{dSi}{dt} = \frac{dS}{dt} + \int_S \frac{q_i}{T}\, n_{idS} = -\int_V \frac{q_i\ T,_i}{T^2}\, dV + \int_V \theta\ dV + \int_V \frac{\sigma_{ij}\ d_{ij}}{T}\, dV > 0 \qquad (4.1)$$

Si on considère maintenant un milieu purement dissipatif, et un processus isotherme, l'énergie interne et l'entropie totale seront constantes. La déformation plastique s'effectue à état constant et la vitesse de production interne d'entropie sera donnée par le terme

$$\frac{\sigma_{ij}\ d_{ij}}{T} \qquad (4.2)$$

La deuxième loi n'impose que l'inégalité

$$D = \sigma_{ij}\ d_{ij} > 0 \qquad (4.3)$$

qui est la condition d'irréversibilité. La fonction dissipation D peut donc être considérée comme caractéristique de la déformation plastique.

En réalité, seulement une partie du travail fourni par les forces appliquées aux frontières est dissipée en chaleur ; l'autre partie est emmagasinée dans le corps, mais ne peut être récupérée par une simple décharge. Après un cycle en contrainte au cours duquel les déformations plastiques sont apparues, il subsiste à l'intérieur du corps un état de contrainte résiduel auto équilibré, ce qui peut expliquer l'effet BAUSCHINGER.

a) Expression de la dissipation.

La fonction dissipation $D = \sigma_{ij}\, d_{ij}$ se décompose en parties :

- isotrope : $D_i = \frac{1}{3}\, \sigma_{ii}\, d_{ii}$
- déviatoire : $\bar{D} = \bar{\sigma}_{ij}\, \bar{d}_{ij}$ (4.4)

Pour un matériau parfaitement plastique dont la loi de comportement est donnée par (3.7), on obtient :

$$\begin{aligned} D_i &= \phi_0\, E_1 \\ \bar{D} &= \phi_1\, \bar{E}_2^{\,2} + \phi_2\, \bar{E}_3^{\,3} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Les fonctions ϕ_0, ϕ_1 et ϕ_2 pouvant être exprimées au moyen de (3.13), il vient :

$$\begin{aligned} D_i &= A\, E_1 \\ \bar{D} &= B\, \bar{E}_2 + C\, s^2\, \bar{E}_3 \end{aligned} \tag{4.6}$$

On remarquera que pour un cisaillement pur, $s = 0$, D se réduit à $B\, \bar{E}_2$. Une loi linéaire et une loi non linéaire auront dans ce cas même dissipation. Ceci montre bien que la loi de déformation ne peut être obtenue à partir de la seule valeur de la dissipation.

Si au lieu des invariants principaux E_i et des paramètres s et t qui leur sont associés on emploie les valeurs principales de $\underset{\sim}{d}$ et $\underset{\sim}{\sigma}$, on obtient $\bar{D}$ sous les formes :

$$\bar{D} = \bar{d}_1 (2\ \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3) + \bar{d}_3 (2\ \bar{\sigma}_3 + \bar{\sigma}_1) \tag{4.7}$$

ou

$$\bar{D} = (2\ \bar{d}_1 + \bar{d}_3)\ \bar{\sigma}_1 + (2\ \bar{d}_3 + \bar{d}_1)\ \bar{\sigma}_3$$

Utilisant pour loi de déformation plastique les relations (3.25) et (3.26), la fonction dissipation s'écrit sous les formes équivalentes $D_i = A\ E_1$:

$$\bar{D} = 2\ B \left[\bar{d}_1 + \bar{d}_3 (1 + \dot{s}) \right] - 3.C.\ \bar{d}_3 (1 + \dot{s})$$

$$\bar{D} = \bar{d}_1 (2\ B) + \bar{d}_3 (2\ B - 3\ C)\ (1 + \dot{s}) \tag{4.8}$$

$$\bar{D} = (\bar{d}_1 + 2\ \bar{d}_3)\ (B\dot{s} - 2\ C\ (1 + \dot{s})) + (2\ \bar{d}_1 + \bar{d}_3)(B + C\ (1 + \dot{s}))$$

En examinant les relations (4.5) (ou (4.8)), on voit que la fonction dissipation D_i, due à la seule variation de volume, est spécifiée uniquement par la fonction A, alors que la partie déviatoire $\bar{D}$ dépend de la somme $\phi_1 \bar{E}_2^{\,2} + \phi_2 . \bar{E}_3^{\,3}$, ϕ_1 et ϕ_2 étant fonction des trois invariants (2.9) de $\underset{\sim}{d}$. On peut ainsi avoir plusieurs lois, c'est-à-dire différentes fonctions ϕ_1 et ϕ_2, ayant même fonction dissipation. La loi du matériau ne peut donc être définie uniquement par la fonction D, des hypothèses supplémentaires doivent être faites.

b) Flux et forces généralisés.

La fonction dissipation peut être exprimée sous la forme d'un produit $Q_i\ q_i$, où les Q_i et q_i désignent respectivement les forces et les flux généralisés. On peut choisir arbitrairement soit les forces, soit les flux comme combinaison de σ_{ij} ou de d_{ij}. Alors, si un choix des flux (ou des forces) a été fait, les forces (ou les flux) correspondants sont définis par la relation

$$Q_i\ q_i = \sigma_{ij}\ d_{ij} \tag{4.9}$$

On peut envisager de choisir pour les flux les invariants E_i (ou toute combinaison des E_i). Le choix le plus simple semble dicté par les relations (4.7) où on voit immédiatement quels sont les flux et les forces associées. Remarquons que le choix des flux et des forces correspondantes doit être fait avant l'introduction de la loi de comportement.

c) Généralisation des relations d'ONSAGER.

Pour avancer dans la formulation de la loi de comportement, des hypothèses supplémentaires doivent être faites. Dans l'étude des processus linéaires irréversibles, on emploie souvent le principe de réciprocité d'ONSAGER.

Bien qu'il ait été introduit pour des relations linéaires, on peut postuler la validité de ce principe pour des processus non linéaires. Cette démarche est analogue à celle qui consiste à dire que la fonction dissipation contient toutes les informations nécessaires à la formulation de la loi de comportement. Cette hypothèse est employée par BESSELING [3] dans son approche thermodynamique de la rhéologie; les propriétés rhéologiques des matériaux sont déterminées par une fonction scalaire: la vitesse de dissipation d'énergie. On rejoint alors l'interprétation des relations d'ONSAGER donnée par ZIEGLER[43]si le choix des flux et des forces est fait, ceux-ci étant reliés par la matrice symétrique des coefficients phénoménologiques

$$Q_i = a_{ij}\, q_j \quad , \quad a_{ij} = a_{ji} \tag{4.10}$$

la fonction dissipation s'exprime en fonction des flux seuls

$$D = a_{ij}\, q_i\, q_j \tag{4.11}$$

D représente dans l'espace des flux un ellipsoïde, et on voit que dans cet espace les forces généralisées Q_j sont obtenues par

$$Q_i = \frac{1}{2}\,\frac{\partial D}{\partial q_i} \tag{4.12}$$

Cette interprétation des relations d'ONSAGER conduit à sa généralisation : si la fonction $D(q_i)$ est donnée, alors les forces seront données par :

$$Q_i = \lambda \frac{\partial D}{\partial q_i} \quad , \qquad \lambda = \frac{D}{\frac{\partial D}{\partial q_i} q_i} \tag{4.13}$$

On peut alors interpréter ces relations sous forme de principe extremum [44] :

- Si la valeur de la dissipation est fixée, et si la direction de la force Q est donnée, la vitesse actuelle q minimise la grandeur de la force Q.

- Si le vecteur force Q est donné, la vitesse actuelle q maximise la fonction dissipation, sous la condition $D = q_i Q_i$. C'est le principe du maximum de production d'entropie.

d) Application au cas de plasticité parfaite.

La fonction dissipation en plasticité parfaite est une fonction homogène d'ordre 1 dans les composantes de d_{ij} ou de q_i. Les forces généralisées Q_i, obtenues à partir de la relation (4.12), seront des fonctions homogènes de degré zéro des flux q_i. Aussi, les n relations (4.12) pourront être exprimées en fonction de $(n-1)$ paramètres. L'élimination des paramètres entre les relations (4.12) conduit à l'équation d'une surface dans l'espace des forces :

$$g(Q_i) = 0 \tag{4.14}$$

Cette surface peut être interprétée comme étant la surface limite de plasticité parfaite dans l'espace des forces généralisées.

On peut alors montrer que dans cet espace, le vecteur $\vec{q}$ est normal à la surface $g(Q_i) = 0$. En effet, par différenciation, on obtient :

$$\frac{\partial g}{\partial Q_i} dQ_i = 0 \tag{4.15}$$

et à partir de

$$D = D(q_i) = Q_i q_i$$

$$\frac{\partial D}{\partial q_i} dq_i = Q_i dq_i + q_i dQ_i = \frac{\partial D}{\partial q_i} dq_i + q_i d Q_i \tag{4.16}$$

Il en résulte que

$$q_i \, dQ_i = 0 \tag{4.17}$$

et en comparant avec (4.15), on obtient :

$$q_i = \frac{\partial g}{\partial Q_i} \tag{4.18}$$

On voit alors que l'application de la généralisation des relations d'ONSAGER conduit à la loi de la normalité pour les flux. La surface limite $g(Q_i) = 0$ a pour équation $f(\sigma_{ij}) = 0$ dans l'espace des contraintes puisque $Q_i = Q_i(\sigma_{ij})$. Si la surface limite $g(Q_i) = 0$ est convexe, alors :

$$(Q_i - Q_i^*) \, q_i > 0 \tag{4.19}$$

où Q_i^* désigne un point intérieur à la surface $g(Q_i) = 0$. Puisque

$$Q_i \, q_i = \sigma_{ij} \, d_{ij} \tag{4.20}$$

l'inégalité (4.19) conduit à

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \, d_{ij} > 0 \tag{4.21}$$

ce qui conduit encore dans l'espace des contraintes à la règle de la normalité :

$$d_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{4.22}$$

Nous venons de voir que le postulat $Q_i = \frac{\partial D}{\partial q_i}$ conduit à la loi du "potentiel plastique". Si cette hypothèse est adoptée, elle va imposer pour les fonctions A, B et C des restrictions que nous allons examiner.

D'après les relations (4.7), nous pouvons choisir pour flux soit les quantités

$$q_1 = E_1 \quad , \quad q_2 = \bar{d}_1 \quad , \quad q_3 = \bar{d}_3 \tag{4.23}$$

où les forces associées sont

$$Q_1 = \frac{S_1}{3} \qquad Q_2 = 2\,\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3 \qquad Q_3 = 2\,\bar{\sigma}_3 + \bar{\sigma}_1 \tag{4.24}$$

soit les quantités

$$q_2 = 2\,\bar{d}_1 + \bar{d}_3 \quad , \quad q_3 = 2\,\bar{d}_3 + \bar{d}_1 \tag{4.25}$$

avec

$$Q_2 = \bar{\sigma}_1 \qquad Q_3 = \bar{\sigma}_3 \tag{4.26}$$

Les conditions que doivent satisfaire les fonctions inconnues seront obtenues en égalant les dérivées partielles $\frac{\partial D}{\partial q_i}$ aux flux Q_i exprimés au moyen des relations (3.26).

Exemple : cas d'une relation linéaire.

Si la relation (3.7) est linéaire, (C = 0), alors :

$$D = A\,E_1 + 2\,B\,\bar{d}_1 + 2\,B\,(\bar{d}_3)\,(1 + \dot{s}) \tag{4.27}$$

Choisissons pour flux les quantités E_1, $\bar{d}_1$ et $\bar{d}_3$. On obtient :

$$\frac{\partial D}{\partial E_1} = \dot{t}\,\frac{\partial A}{\partial \dot{t}} + 2\,(1 + \dot{s} + \dot{s}^2)\,\frac{\partial B}{\partial \dot{t}} + A$$

$$\frac{\partial D}{\partial \bar{d}_1} = -\dot{t}\,\left(\dot{t}\frac{\partial A}{\partial \dot{t}} + 2(1+\dot{s}+\dot{s}^2)\,\frac{\partial B}{\partial \dot{t}}\right) - \dot{s}\left(\dot{t}\,\frac{\partial A}{\partial \dot{s}} + 2(1+\dot{s}+\dot{s}^2\,\frac{\partial B}{\partial \dot{s}}\right) + 2B(1-\dot{s}^2) \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \bar{d}_3} = -\dot{t}\left(\dot{t}\,\frac{\partial A}{\partial \dot{t}} + 2(1+\dot{s}+\dot{s}^2)\,\frac{\partial B}{\partial \dot{t}}\right) - \dot{s}\left(\dot{t}\,\frac{\partial A}{\partial \dot{s}} + 2\,(1+\dot{s}+\dot{s}^2\,\frac{\partial B}{\partial \dot{s}}\right) + 2B\,(1+\dot{s})$$

Ces quantités doivent être respectivement égales à

$$\frac{S_1}{3}\ ,\ (2\,\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3)\ ,\ (2\,\bar{\sigma}_3 + \bar{\sigma}_1)$$

exprimées au moyen des relations (3.26). Les fonctions A et B doivent donc satisfaire :

$$t' \frac{\partial A}{\partial t'} + 2 \frac{\partial B}{\partial t'} (1 + s' + s'^2) = 0$$

$$t' \frac{\partial A}{\partial s'} + 2 \frac{\partial B}{\partial s'} (1 + s' + s'^2) + B (2 s' + 1) = 0 \qquad (4.29)$$

Par dérivation de (4.29) par rapport à s' et à t', on obtient :

$$- \frac{\partial A}{\partial s'} + (2 s' + 1) \frac{\partial B}{\partial t'} = 0 \qquad (4.30)$$

et compte tenu de (4.29)

$$2 \frac{\partial B}{\partial s'} (1 + s' + s'^2) + (1 + 2s')(t' \frac{\partial B}{\partial t'} + B) = 0 \qquad (4.31)$$

Effectuons le changement de variable :

$$e^x = t' \qquad e^y = 1 + s' + s'^2 , \qquad (4.32)$$

$$2 \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} + B = 0 \qquad (4.33)$$

En posant $2 x = \alpha$ et $y = \alpha - \beta$, on obtient :

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha} + 2 B = 0 \qquad (4.34)$$

d'où :

$$B = F (\beta) e^{-2 \alpha} \qquad (4.35)$$

où F est une fonction arbitraire de β.

On obtient donc pour B :

$$B = F \left(\frac{t'^2}{1 + s' + s'^2}\right) \cdot \frac{1}{t'} \qquad (4.36)$$

Si on remarque que

$$\bar{E}_2^{\,2} = 2 \bar{d}_1^{\,2} (1 + s' + s'^2) \qquad (4.37)$$

on voit que F est une fonction arbitraire du rapport des invariants $\frac{E_1}{\bar{E}_2}$

$$B = F \left(\frac{E_1}{\bar{E}_2}\right) \cdot \frac{\bar{d}_1}{E_1} \qquad (4.38)$$

Le deuxième invariant du déviateur $\bar{S}_2^{\,2}$ est égal à $2B^2(1 + s' + s'^2)$. Son expression générale est de la forme :

$$\bar{S}_2 = F \left(\frac{E_1}{\bar{E}_2}\right) \cdot \frac{\bar{E}_2}{E_1} \qquad (4.39)$$

$\bar{S}_2$ est donc indépendant du paramètre $\frac{\bar{E}_3}{\bar{E}_2}$, qui, dans le cas de la forme linéaire, est égal à $\frac{\bar{S}_3}{S_1}$. Il en résulte que dans un plan déviatoire S_1 =cte, l'intersection de la surface limite par ce plan est un cercle.

Pour la fonction A, les relations (4.29) conduisent à

$$2 \frac{\partial A}{\partial s'} (1 + s' + s'^2) + (1 + 2 s') t' \frac{\partial A}{\partial t'} = 0 \qquad (4.40)$$

L'intégration de cette équation conduit à $A = G\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$, où G est une fonction arbitraire de son argument.

Si on considère la trace de la surface limite dans le plan S_1, $\bar{S}_2$, on constate que le vecteur vitesse de déformation est perpendiculaire à la surface. En effet, si on désigne par t le rapport $\frac{E_1}{E_2}$, on obtient :

$$\frac{d \bar{S}_2}{d S_1} = \frac{\frac{1}{t}\left[\frac{dF}{dt} - \frac{F}{t}\right]}{\frac{dG}{dt}} \qquad (4.41)$$

Or, la relation (4.29) donne

$$-\frac{1}{2} t^3 \frac{dG}{dt} - t \frac{dF}{dt} + F = 0 \qquad (4.42)$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d \bar{S}_2}{d S_1} = -\frac{E_1}{E_2} = -t \qquad (4.43)$$

La valeur du paramètre t ne pouvant être constante pour tous les points de la surface limite, nous voyons, d'après (4.43) que les hypothèses faites excluent les surfaces limites en forme de cône $\bar{S}_2 = \alpha S_1$.

Le seul cas possible d'écoulement plastique compatible avec la non variation de volume est donné par le critère de MISES : $\bar{S}_2^{\,2} = k$.

Il apparaît donc que la condition $Q_i = \frac{\partial D}{\partial q_i}$ qui a été imposée est une condition restrictive très forte. En effet, la loi de déformation plastique est liée à la forme de la surface limite ; il en résulte que si un matériau a un critère d'écoulement fonction de la pression moyenne S_1, toute déformation plastique devra s'accompagner d'une variation de volume déterminée uniquement par la forme de la surface limite.

Cas général.

Reprenons l'expression de D donnée par (4.8) :

$$D = A\,E_1 + \bar{d}_1\,2B + \bar{d}_3\,(2\,B - 3\,C)\,(1 + \dot{s}) \tag{4.44}$$

Les flux étant choisis comme étant E_1, $\bar{d}_1$ et $\bar{d}_3$, on est conduit pour les fonctions A, B et C aux relations :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial t'}\,\dot{t} + 2\,(1 + s' + s'^2)\,\frac{\partial B}{\partial t'} - 3\,\frac{\partial C}{\partial t'}\,\dot{s}'\,(1 + s') = 0 \\ &(1 + 2\dot{s})(B-2C) + 2(1+s'+s'^2)\,\frac{\partial B}{\partial s'} - 3\dot{s}'\,(1+s')\,\frac{\partial C}{\partial s'} + \frac{\partial A}{\partial s'}\,t' = 0 \end{aligned} \tag{4.45}$$

On remarque que les conditions imposées aux fonctions des deux variables s' et t' sont exprimées par les deux équations (4.45). La surface limite ne peut donc être quelconque, puisque ces relations doivent être vérifiées.

Dans le cas général, ces conditions ne sont pas très restrictives : on n'impose aux six dérivées partielles premières des trois fonctions A, B et C que deux relations. Ce résultat n'est pas étonnant puisque ces conditions ont pour conséquence d'imposer la normalité de la vitesse de déformation à la surface limite. Le vecteur normal en un point de cette surface a ses composantes exprimées au moyen des dérivées partielles des trois fonctions A, B et C par rapport à s et t. Puisque l'on demande qu'en ce point la direction du vecteur normal soit la même que celle de la vitesse de déformation, à savoir $\dot{s}'$ et $\dot{t}'$, il en résulte que les trois composantes du vecteur normal sont liées par deux relations seulement.

e) Principe de maximum pour D.

Remarquons que la fonction dissipation est exprimée au moyen des trois fonctions A, B et C s^2 par la relation (4.6) : $D = A\,E_1 + B\,\bar{E}_2 + C\,s^2\,\bar{E}_3$, où A, B et C sont fonction des deux paramètres s et t. On peut interpréter ces fonctions comme les composantes d'un vecteur $\vec{V}$ dont l'extrêmité est sur une surface S, $F(A, B, Cs^2) = 0$, qui peut être considérée comme une image de la surface limite de l'espace des contraintes. Considérons alors un point de cette surface S, et demandons alors à D de prendre la plus grande valeur possible, indépendamment de la grandeur du vecteur représentant la vitesse de déformation correspondante. Si $\vec{v}$ est le vecteur de composantes E_1, $\bar{E}_2$ et $\bar{E}_3$, alors D peut être interprétée comme le produit scalaire $\vec{V}.\vec{v}$. La condition de dissipation maximum conduit à demander pour $\vec{V}$ et $\vec{v}$ la coaxialité. Les fonctions A, B et C sont alors reliées par la relation :

$$\frac{A}{E_1} = \frac{B}{\bar{E}_2} = \frac{C\,s^2}{\bar{E}_3} \qquad (4.46)$$

Il n'y a plus qu'une fonction inconnue qui doit être obtenue par l'expérience.

La forme de la surface limite ne peut être quelconque, puisqu'elle est définie par les équations (3.14) ou (3.26).

La coaxialité des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{v}$ ne correspond pas, excepté dans le cas d'une relation linéaire, à la coaxialité des vecteurs $\vec{\sigma}$ et $\vec{d}$ dans l'espace des contraintes. Ceci est bien évident car si la condition s'appliquait aux vecteurs $\vec{\sigma}$ et $\vec{d}$, on serait conduit à la proportionnalité des déviateurs, donc à $C \equiv 0$.

Si pour la dissipation, on emploie les relations (4.8), on est conduit à la relation :

$$\frac{A}{E_1} = \frac{B}{2\left[\bar{d}_1 + \bar{d}_3\,(1 + s')\right]} = \frac{-C}{3\,\bar{d}_3\,(1 + s')} \qquad (4.47)$$

Si la condition d'incompressibilité est demandée en tout point de la surface limite, alors la fonction dissipation ne s'exprimera que par B et C, la fonction A restant indéterminée. La surface limite sera encore un cylindre de génératrice parallèle à l'axe S_1, mais son intersection par le plan déviatoire pourra être librement choisie : elle est donnée par $B = B(s)$.

Cas d'une relation linéaire.

Les relations (3.14) conduisent à :

$$S_1 = 3\,A \quad , \qquad \bar{S}_2 = B \quad , \qquad \bar{S}_3 = s\,B \tag{4.48}$$

Les déviateurs s et d sont proportionnels, et

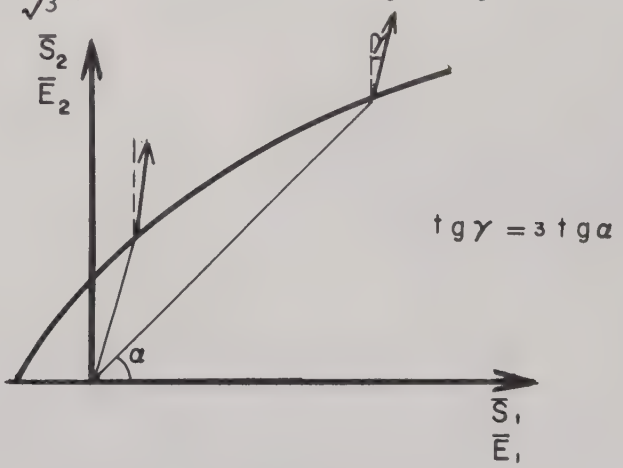
$$s = \frac{\bar{E}_3}{\bar{E}_2} = \frac{\bar{S}_3}{\bar{S}_2} \tag{4.49}$$

Si maintenant la condition de dissipation maximum est appliquée, alors :

$$A = B.t \quad , \qquad t = \frac{E_1}{\bar{E}_2} = \frac{S_1}{3\,\bar{S}_2} \tag{4.50}$$

Dans un plan d'axes $\bar{S}_2$, $\frac{S_1}{\sqrt{3}}$, la surface limite a pour équation $\bar{S}_2 = f\,(s_o, S_1)$. En chaque point de la courbe limite, l'inclinaison de la vitesse de déformation par rapport à l'axe E_1 est reliée à l'inclinaison du vecteur contrainte par

$$\frac{\bar{E}_2}{\sqrt{3}\,E_1} = \frac{3\,\bar{S}_2}{\sqrt{3}\,S_1}$$



La non variation de volume n'est possible que pour $S_1 = 0$.

Si nous imposons l'incompressibilité en tout point de la surface limite, la surface limite sera encore un cylindre, mais, contrairement au résultat obtenu dans l'exemple (d), la base de cette surface n'est pas obligatoirement circulaire.

On remarquera que dans ce cas, la condition de dissipation n'impose aucune restriction, puisque nous n'avons plus qu'une fonction pour exprimer la loi.

V- ECROUISSAGE EN DENSITE.

a) Généralités.

La théorie que nous avons exposée dans le chapitre précédent n'a de sens que pour un écoulement plastique commençant. La déformation plastique modifie en effet les propriétés du matériau. Ce phénomène se traduit pour les milieux pulvérulents par une modification de la structure et de la densité.

Pour décrire l'écrouissage du matériau, on peut être conduit à écrire la loi de comportement sous la forme d'une fonctionnelle $\underset{\sim}{\sigma} = F(\underset{\sim}{d})$. Pour les milieux granulaires, on peut supposer que les modifications de la structure sont décrites par un tenseur symétrique du deuxième ordre $\underset{\sim}{A}$; cette modification étant due à la seule déformation plastique, $\underset{\sim}{A}$ doit être fonction de la partie plastique de la déformation. Le développement de cette théorie devrait conduire à l'équation de la surface limite instantanée $f(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{A}) = 0$.

Si on envisage un schéma élastique-plastique avec écrouissage, il faut également supposer que les modifications de la structure entraînent une variation des propriétés élastiques du matériau. L'énergie élastique de déformation U doit être fonction des tenseurs $\underset{\sim}{\sigma}$ et $\underset{\sim}{A}$. $U = U(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{A})$.

Quand le caractère prépondérant de l'écrouissage se traduit par une variation de volume au cours du cisaillement, on peut admettre que le tenseur $\underset{\sim}{A}$ n'intervient que par son premier invariant. Cette hypothèse revient à considérer les fonctions scalaires de la loi de comportement comme des fonctions de la seule densité ρ du matériau. Ce cas est précisément celui des milieux pulvérulents où les variations de volume, non négligeables, entraînent une modification de la résistance au cisaillement. Cette variation de volume au cours du cisaillement est une conséquence de la déformation plastique.

Il est cependant bien évident que, si au début de l'écoulement, la déformation peut être accompagnée d'une variation de volume importante, celle-ci diminue quand se développe la déformation plastique, et doit tendre vers zéro, l'écoulement se poursuivant alors à volume constant et à état de contrainte constant.

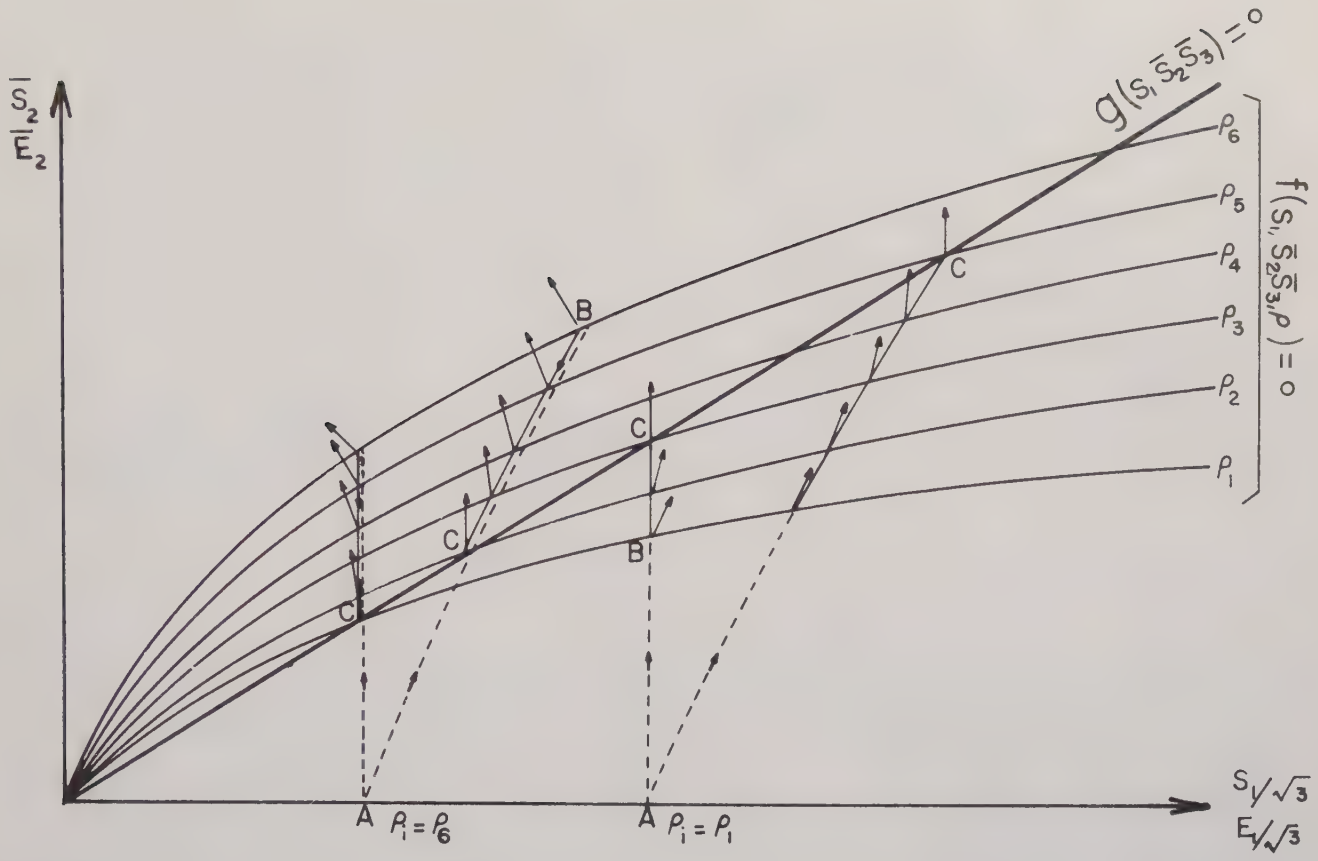


FIGURE 1

- Coupe des surfaces de charge f ($\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{S}_3$,) = 0 par un plan $\frac{\bar{S}_3}{\bar{S}_2}$ = cte.
- Dans le cas où $\left(\frac{\bar{S}_3}{\bar{S}_2}\right)^3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, les chemins (1) et (2) représentent les trajets suivis au cours d'un essai triaxial à pression moyenne et à pression latérale constante.

- - - - - - comportement rigide

———— comportement plastique avec écrouissage.

b) Loi d'écrouissage.

Cette théorie peut être construite de la même manière que la théorie de la plasticité parfaite. Nous supposerons que lors de l'écoulement plastique, le comportement du matériau est décrit par une relation tensorielle de la forme $\underset{\sim}{\sigma} = f(\underset{\sim}{d}, \rho)$ où ρ est la densité du matériau ; cette relation devra vérifier la condition d'homogénéité par rapport au temps d'ordre zéro. La loi de comportement aura donc la forme (3.7)., les fonctions ϕ_i étant fonctions des invariants de $\underset{\sim}{d}$ et de la densité ρ . La condition d'homogénéité conduit à des relations analogues à (3.13) et (3.14), A, B et C étant en plus fonction de ρ .

Les relations (3.14) peuvent s'interpréter comme représentant dans l'espace des contraintes une famille de surfaces de charge paramétrée par la densité

$$f(S_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3, \rho) = 0 \qquad (5.1)$$

Chacune de ces surfaces est relative à une densité.

En chaque point d'une de ces surfaces, la déformation plastique sera définie par la valeur des paramètres s et t. La valeur de t étant en général différente de zéro, la déformation plastique entrainera une variation de densité : le chemin en contrainte traversera les surfaces de charges ρ = cte précédemment définies. L'écoulement plastique ne pourra donc en général avoir lieu à état de contrainte constant, à moins qu'un point où le paramètre t est nul ne soit atteint. En ce point, un écoulement plastique à volume constant et à état de contrainte constant peut se poursuivre indéfiniment. Nous disons que le matériau est à "l'état critique".

L'ensemble des points pour lesquels $t = 0$ définit une surface, dont l'équation est encore donnée par les relations (3.14) où t est pris égal à zéro. Soit

$$G(S_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3) = 0 \qquad (5.2)$$

l'équation de cette surface que l'on appellera surface "critique". Elle définit tous les états de contrainte et de densité pour lesquels une déformation plastique "infinie" est possible. Par déformation plastique "infinie", nous entendons une déformation plastique à volume constant qui peut être poursuivie indéfiniment sans modification de l'état de contrainte et des propriétés du corps.

Considérons alors un matériau de densité initiale ρ_i soumis à un changement en contrainte. Le matériau aura un comportement rigide tant que l'état de contrainte n'aura pas atteint la surface de charge correspondant à sa densité ρ_i : figure (1).

Plusieurs cas peuvent alors se présenter :

1° - Supposons que la première surface de charge soit atteinte en un point où le paramètre t est > 0. La déformation plastique entrainera une diminution de volume, c'est-à-dire une augmentation de la densité. Le trajet de charge est alors dirigé vers les surfaces ρ croissantes.

$$\frac{\partial f}{\partial S_i} \, dS_i > 0 \qquad (5.3)$$

2° - Si la valeur de t est < 0 quand l'état de contrainte atteint la première surface de charge, la déformation plastique entrainera une augmentation de volume, et par conséquent, une diminution de la densité. Le trajet de charge sera donc dirigé vers les surfaces ρ décroissantes :

$$\frac{\partial f}{\partial S_i} \, dS_i < 0 \qquad (5.4)$$

3° - Si un point où $t = 0$ est atteint, le matériau pourra s'écouler indéfiniment sans changer d'état.

Quand l'écoulement plastique se produit, la loi de déformation plastique instantanée sera donnée par les valeurs des paramètres s et t correspondant à chacune des surfaces traversées pendant le trajet de charge. De plus, la grandeur de la déformation plastique sera déterminée car nous connaissons, par l'équation de continuité, la grandeur de la variation de volume en passant d'une surface de charge à une autre ; connaissant également les valeurs des paramètres s et t, on en déduira les valeurs de $\overline{E}_2$ et $\overline{E}_3$. A chaque instant les relations suivantes seront vérifiées :

$$\frac{\rho^{\cdot}}{\rho} = E_1 \qquad (5.5) \qquad \frac{\partial f}{\partial S_i} \, dS_i + \frac{\partial f}{\partial \rho} \, d\rho = 0 \qquad (5.6)$$

$$\overline{E}_2 = t \, E_1 \qquad \overline{E}_3 = s \, E_r \qquad (5.7)$$

Remarquons que tous les chemins en contrainte, avec écoulement plastique, ne sont pas possibles. Pour un écoulement plastique, la vitesse de déformation est donnée en tout point d'une surface de charge, et la dissipation devra être > 0. Cette condition est insuffisante pour définir les chemins possibles en contrainte. On peut obtenir le domaine possible pour la variation de l'état de contrainte en regardant le signe de $d_{ij} \cdot \Delta\sigma_{ij}$ qui représente la dissipation due à la seule variation $\Delta \sigma_{ij}$.

Dans le cas où la déformation plastique doit être accompagnée d'un durcissement, en généralisant les résultats que l'on peut obtenir dans le cas d'une sollicitation et d'une réponse uniaxiale, on aura écoulement plastique quand

$$\Delta\sigma_{ij} \cdot d_{ij} > 0 \qquad \text{avec} \quad \frac{\partial f}{\partial S_i} \cdot dS_i > 0 \tag{5.8}$$

Dans le cas où la déformation plastique doit entraîner un amollissement il y aura écoulement plastique quand

$$\Delta\sigma_{ij} \cdot d_{ij} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial f}{\partial S_i} \cdot dS_i < 0 \tag{5.9}$$

Dans tous les cas, la condition

$$\frac{\partial f}{\partial S_i} \cdot dS_i = 0 \tag{5.10}$$

qui peut être considérée comme la condition de chargement neutre, correspondra à un comportement rigide, le trajet en contrainte est sur une surface de charge ρ = cte. On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial S_i} \cdot dS_i = 0 \qquad E_1 = 0 \quad \overline{E}_2 = 0 \tag{5.11}$$

c) Application au matériau pulvérulent.

1°- Données expérimentales.

Le schéma du matériau plastique avec écrouissage en densité est applicable aux sols. En effet, des résultats des essais triaxiaux effectués jusqu'à ce jour pour déterminer les propriétés des matériaux pulvérulents, on peut déduire les résultats suivants :

. Pour un matériau donné, il existe une densité critique pour laquelle la déformation plastique peut être poursuivie à volume constant et à état de contrainte constant. L'état critique a été clairement défini par HVORSLEV en 1938 [16] . "Finalement, une condition est atteinte où un écoulement continu n'entraîne aucun changement de la résistance au cisaillement et de l'indice des vides. Ces valeurs ultimes de la résistance au cisaillement et de l'indice des vides sont indépendantes de l'état initial de consolidation du sol". CASAGRANDE avait dès 1936 [7] présenté le concept de densité critique.

La densité ρ_c est une fonction croissante de la pression moyenne S_1, et on peut penser qu'elle doit également dépendre des invariants $\bar{S}_2$ et $\bar{S}_3$ (LE LONG [2 2], ROSCOE [4 8] , WACK [4 1]).

. L'angle de frottement interne ϕ_c qui caractérise la résistance mécanique quand un état de plasticité infinie (c'est-à-dire à volume constant) est atteint, semble être une constante du matériau (LE LONG [2 2] , LADANYL [2 1] , BISHOP [5]).

Quand la densité du matériau, pour une pression S_1 donnée, est supérieure à la densité critique, les courbes de charge présentent des maxima. On constate d'une part que pour une densité donnée, le rapport entre la résistance maximale et celle correspondant au palier est d'autant plus élevé que la pression S_1 est plus petite; d'autre part que pour une pression S_1 fixée, le maximum croît avec la densité. L'angle de frottement interne calculé à partir de cette valeur extrêmale, ϕ_m, est, pour une densité donnée, fonction décroissante de S_1.

Si le travail du matériau est interprété selon le schéma proposé d'écrouissage en densité, l'angle de frottement interne que l'on peut associer à chaque point d'une surface de charge sera fonction de la pression moyenne et de la densité en ce point.

$$\phi = \phi\ (S_1, \rho) \tag{5.12}$$

Dans un essai triaxial classique de compression ou de traction, deux des contraintes principales sont égales $\sigma_2 = \sigma_3$, ainsi que les deux déformations correspondantes ϵ_2 et ϵ_3. L'état de contrainte peut être représenté entièrement dans l'espace $\frac{S_1}{\sqrt{3}}$, $\bar{S}_2$, auquel on peut superposer l'espace des vitesses de déformation $\frac{E_1}{\sqrt{3}}$, $\bar{E}_2$.

D'après ce que nous avons dit précédemment, l'allure des courbes de charge peut être représentée par la figure (1). Chaque courbe est convexe et passe par l'origine. La courbe critique est une droite dont la pente est caractérisée par la valeur ϕ_c de l'angle de frottement interne, qui est défini par :

$$\sin\phi = \frac{3\sqrt{2}\,\bar{S}_2}{S_1/\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\,\bar{S}_2} \qquad \left\{\begin{array}{l} + \text{ quand } \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \\ - \text{ quand } \sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3 \end{array}\right\} \tag{5.13}$$

Les trajets de charge correspondant aux essais triaxiaux classiques à pression moyenne constante et à pression latérale constante sont illustrés sur la figure (1).

En adoptant un schéma rigide-plastique avec écrouissage, les trajets AB s'effectuent sans déformation plastique, les trajets BC avec une loi plastique. Pour un matériau dont la densité ρ est inférieure à la densité critique ρ_c , le trajet BC s'effectue avec un durcissement.

Dans le cas où $\rho > \rho_c$, le point B peut correspondre à l'effondrement de l'échantillon si la charge relative à ce point est maintenue ou accrue. Par contre, si la déformation axiale est contrôlée, on suit le trajet BC avec un amollissement.

Le point C correspond au palier des courbes de charge, et les points B à leur maximum.

2°- Surface limite de plasticité pour les sols.

Les essais triaxiaux classiques permettent de déterminer la résistance d'un échantillon de sol soumis, dans le cas d'une compression, à l'état de contrainte $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$, et pour une traction, à $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$.

La détermination de l'angle de frottement par un de ces essais est suffisante pour déterminer la surface limite de plasticité si l'hypothèse d'une courbe intrinsèque rectiligne est adoptée : le critère d'écoulement est alors indépendant de la contrainte principale intermédiaire. La surface limite est dans l'espace des contraintes principales une pyramide dont le sommet est l'origine des axes, et dont l'intersection par un plan déviatoire correspondant à $S_1 = cte$ est donnée sur la figure (2), où :

$$OA = \bar{S}_{2_C} = \frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\phi}{3 - \sin\phi} \cdot S_1 \qquad (5.14)$$

$$OB = \bar{S}_{2_T} = \frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\phi}{3 + \sin\phi} \cdot S_1 \qquad (5.15)$$

C'est le critère de MOHR-COULOMB.

Une des premières conséquences de l'hypothèse de la courbe intrinsèque rectiligne doit être l'égalité des angles de frottement mesurés par des essais de compression et de traction.

L'écart surprenant que certains auteurs ont trouvé entre la valeur de ϕ obtenue par un essai de traction, ϕ_T, et par un essai de compression ϕ_C, semble dû à des difficultés expérimentales et au choix du critère de rupture retenu pour le calcul de ϕ.

En effet, nous pensons que la valeur caractéristique de l'angle de frottement d'un sol est celle correspondant au palier des courbes de charge. Or, ce palier n'est atteint que pour des déformations axiales souvent très importantes, entrainant des déformations fortement hétérogènes de l'échantillon, ce qui peut expliquer la dispersion des résultats.

D'autre part, le choix des critères de rupture qui sont habituellement retenus (maximum de $\sigma_1 - \sigma_3$, ou maximum de $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$) peut expliquer les différences trouvées entre ϕ_C et ϕ_T. En effet, si on considère deux essais triaxiaux de traction et de compression, à même pression latérale P_0 = cte sur des matériaux identiques, la pression moyenne $\frac{S1}{3}$ correspondant au maximum de la courbe de charge de l'essai de compression triaxial, sera bien supérieure à la valeur correspondante dans l'essai de traction. Puisque ϕ_m est une fonction décroissante de S_1, ceci conduit à $(\phi_m)_{traction} > (\phi_m)_{compression}$. Ceci pourrait expliquer l'écart important, pouvant être supérieur à 10°, trouvé par certains auteurs.

Nous pensons que les angles de frottement en compression et en traction sont identiques. Ce résultat semble d'ailleurs confirmé par certaines expériences [15], [45]. Les résultats des essais de LE LONG [22] montrent par ailleurs que la valeur de ϕ_C est indépendante de S_1. Par contre, nous pensons que le critère d'écoulement n'est pas indépendant de la contrainte principale intermédiaire. A notre connaissance, aucun résultat expérimental ne permet de conclure en faveur de l'hypothèse de la courbe intrinsèque. Un écart plus ou moins important existe entre la courbe expérimentale de plasticité et la droite AB de la figure (2) correspondant à l'hypothèse de la courbe intrinsèque. Bien que de nombreuses expériences aient été faites pour déterminer la forme de la courbe AB, les résultats obtenus n'ont pas encore permis de conclure. Un seul point semble certain : la résistance est supérieure à celle donnée par le critère de MOHR-COULOMB.

Un appareil triaxial, où les trois contraintes seulement peuvent être contrôlées indépendamment, a notamment été développé par ROESCOE et GUDEHUS.

Nous proposons alors comme critère de plasticité la relation

$$\bar{S}_2 = \frac{A.\ S_1}{\left(1 - B\ \sqrt{6}\ \frac{\bar{S}_3^{\,3}}{\bar{S}_2^{\,3}}\right)^m} \qquad (5.16)$$

où les paramètres A, B et m sont positifs, $0 < B < 1$.

En remarquant que $\sqrt{6}\ \frac{\bar{S}_3^{\,3}}{\bar{S}_2^{\,3}} = \cos\ 3\chi$, où χ est l'angle de OA avec OM dans la figure (2), le critère s'écrit :

$$\bar{S}_2 = \frac{A\ \ S_1}{(1 - B \cos\ 3\chi\ )^m} \qquad (5.17)$$

Ce critère peut permettre d'obtenir pour l'angle de frottement interne ϕ des valeurs identiques en traction et en compression.

Si on pose

$$K = (3 + \sin \phi\ )/(3- \sin \phi\ ) \qquad (5.18)$$

alors les relations (5.14), (5.15) et (5.17) conduisent à

$$B = (K^{1/m} - 1) / (K^{1/m} + 1) \qquad (5.19)$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{3}}\ (K - 1).\ 2^m / (1 + K^{1/m}) \qquad (5.20)$$

Le critère d'écoulement (5.17) s'écrit alors :

$$\bar{S}_2 = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} .\ 2^m\ (K - 1)\ .\ \ S_1}{\left[K^{1/m} + 1\ \ -\sqrt{6}\ (\frac{S_3}{S_2})^3\ \ \ (K^{1/m} - 1)\right]^m} \qquad (5.21)$$

Nous pouvons préciser le domaine de variation de m et B en imposant la convexité de la courbe limite. Cette hypothèse conduit à choisir m et B de telle sorte que

$$\frac{B - 1}{B} \leq 9\,m \leq \frac{1 + B}{B} \qquad (5.22)$$

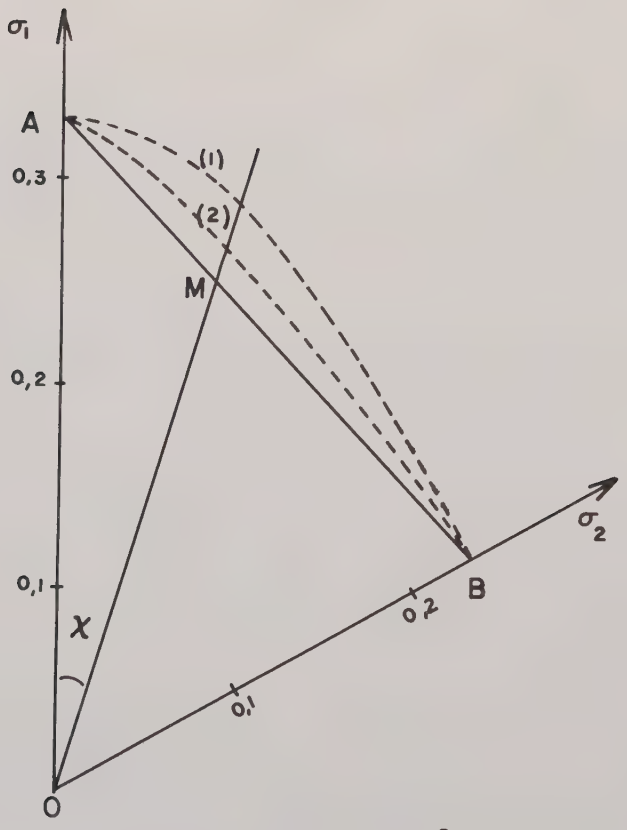
Mais, puisque nous avons supposé $m > 0$ et $0 < B < 1$, cette condition se réduit à $m \leq \frac{1 + B}{9\,B}$.

Suivant le choix fait pour ces coefficients, l'écart entre le critère (5.21) et celui de MOHR-COULOMB sera plus ou moins important. Un exemple est donné sur la figure (2).

Remarquons que le coefficient A représente la valeur de $\overline{S_2}$ pour un cisaillement pur($\chi = \frac{\pi}{6}$). On voit donc que la surface limite pourra être déterminée par un essai de compression triaxial (ou de traction) et un essai de cisaillement pur.

Si dans l'expression (5.18) ϕ est égale à la valeur critique de l'angle de frottement, ϕ_c , K prendra la valeur critique K_c. L'expression (5.21) est alors interprétée comme l'équation de la surface critique. $G\,(S_1, \overline{S_2}, \overline{S_3}) = 0$. En chaque point de cette surface, la densité sera différente : $\rho_c = \rho_c\,(S_1)$.

Par contre, si on se fixe la valeur de la densité ρ , K sera fonction de S_1 d'après la relation (5.12). La relation (5.21) représente alors une famille de surfaces de charge paramétrée par la densité ρ .



$\phi = 30°$

$S_1 = 1$

(1) $m = 0.3$

(2) $m = 0,11$

FIGURE 2

TROISIEME PARTIE

PASSAGE CONTINU D'UN COMPORTEMENT ELASTIQUE

A UN COMPORTEMENT PARFAITEMENT PLASTIQUE

I- INTRODUCTION.

La théorie de la plasticité parfaite est suffisante pour mener à bien les calculs de résistance limite. Si le matériau a un comportement voisin du schéma rigide-plastique, les déformations nécessaires pour amener le matériau à la phase plastique peuvent être négligées devant les déformations qui apparaîtront lorsque l'état plastique sera atteint.

Pour les sols, et en particulier lors d'un premier chargement, le schéma rigide-plastique ne peut être accepté. Une meilleure approximation de la réalité physique peut être obtenue en utilisant alors des relations comme celles proposées pour un matériau de MISES par PRANDTL et REUSS : dans la phase en écoulement plastique, les déformations élastiques sont prises en compte. Les relations proposées par ces auteurs ne sont correctes que si les déformations sont infinitésimales. Une formulation correcte en accord avec le principe d'objectivité en a été donnée par THOMAS [3 8] .

Ces relations présentent cependant une objection majeure : elles tentent de décrire la réalité physique en idéalisant le matériau soit à une loi élastique linéaire seule, soit à une loi élastique plastique.

Pour étudier un processus de charge, il convient donc de déterminer les zones du matériau où l'une ou l'autre loi s'appliquent. C'est un problème difficile, d'autant que la grandeur de ces zones évolue au cours du chargement.

Pour éliminer cette difficulté, THOMAS [4 9] propose une seule loi de comportement pour décrire le passage continu et progressif d'un comportement du type élastique à un comportement plastique pour un matériau de MISES.

Cette relation est évidemment valable pour les déformations finies

$$\hat{\bar{\sigma}}_{ij} = 2\,\mu \left\{ \bar{d}_{ij} - \left[\frac{\bar{\sigma}_{lm}\,\bar{d}_{ml}}{k} + \gamma \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_{lm}\,\bar{\sigma}_{ml}}{k}\right) \right\} \bar{\sigma}_{ij} \right\}$$

$$\hat{\sigma}_{ii} = \frac{k\ d_{kk}}{1 - \left(\frac{\bar{\sigma}_{lm}\,\bar{d}_{ml}}{k}\right)} + b\ \sigma_{kk}$$

où μ est la constante de LAME, γ, k et b sont des constantes. On remarquera alors que cette relation n'est pas homogène d'ordre zéro par rapport au temps si on suppose que γ et b sont des constantes.

Citons également les travaux de GREEN [14] qui, en adoptant les équations de l'hypoélasticité proposées par TRUESDELL, montre que ces relations peuvent décrire pour des déformations finies un comportement parfaitement plastique, tandis qu'elles se réduisent pour des déformations infinitésimales à un comportement élastique linéaire.

Les équations de l'hypoélasticité relient la dérivée par rapport au temps de la contrainte $\hat{\underset{\sim}{\sigma}}$ à la contrainte $\underset{\sim}{\sigma}$ et à la vitesse de déformation $\underset{\sim}{d}$ par une relation linéaire en $\underset{\sim}{d}$

$$\hat{\sigma}^{k}_{\ l} = A^{k\ \ m}_{l\ \ h}\ d^{\ h}_{m}$$

où les coefficients A^{km}_{lh} ne dépendent que de l'état de contrainte.

Si une telle relation est prise suivant la méthode de GREEN pour décrire l'écoulement plastique pour des déformations finies, elle ne pourra décrire que des lois de plasticité quasi linéaires.

Nous avons suivi, dans cette troisième partie, une approche semblable à celle tracée par THOMAS [4 9] et GREEN [1 4] en supposant qu'une relation de la forme $\hat{\underset{\sim}{\sigma}} = f(\underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{\sigma})$ pouvait, pour certains trajets "de charge" décrire l'évolution continue du matériau vers le comportement plastique. Pour que cette relation décrive un comportement indépendant du temps, on devra lui imposer la condition d'homogénéité de degré - 1 par rapport au temps. Cette relation ne se réduit à une loi hypoélastique que si sa forme est linéaire par rapport à $\underset{\sim}{d}$.

Les contraintes dans le corps à l'instant t dépendront uniquement de la suite des différentes configurations que ce corps a occupées, mais non de la vitesse à laquelle ces différentes configurations se sont succédées.

Puisque les variables cinématiques n'entrent dans la loi que par les vitesses, les contraintes dans le matériau seront connues au temps t à condition que le champ des vitesses soit connu à chaque instant t et que l'état de contrainte soit donné à $t = 0$. Il n'est pas nécessaire de définir pour un tel matériau une configuration de référence : l'histoire du matériau est contenue dans l'état de contrainte actuel du corps.

Pour les sols où la densité ρ joue un rôle important, nous devrons introduire la densité comme nouvel argument de la fonction f : $\hat{\underset{\sim}{\sigma}} = f(\underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{\sigma}, \rho)$ Cette relation nous paraît adaptée à ce matériau puisque l'expérience montre que l'évolution vers le comportement parfaitement plastique s'effectue progressivement.

Remarquons que la relation envisagée n'est acceptable que pour certains trajets ("trajet de charge" ou trajet aller) que nous préciserons par une condition imposée à la fonction dissipation. Pour les autres trajets ("trajet de décharge" ou retour), une autre relation devra être utilisée pour décrire le comportement du matériau. La relation $\hat{\underset{\sim}{\sigma}} = f(\underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{\sigma}, \rho)$ ne doit pas être interprétée comme étant "la loi" de comportement du matériau, applicable quelle que soit la sollicitation, mais comme une relation permettant de décrire le comportement du matériau pour certains trajets.

II- EQUATIONS DE COMPORTEMENT.

La loi de comportement que nous nous proposons d'étudier pour un trajet "de charge" s'exprime en axes rhéologiques par une relation de la forme

$$\frac{d\underset{\sim}{\sigma}}{dt} = f(\underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{\sigma}, \rho) \qquad (2.1)$$

puisque dans ces axes, la déformation est une déformation pure. Dans un repère non rhéologique, la dérivée de la contrainte par rapport au temps s'exprimera par la dérivée de JAUMANN [1 8]; le mouvement du corps, défini par le champ des vitesses, sera également décrit uniquement par le tenseur $\underset{\sim}{d}$ puisque la vitesse de rotation n'est pas une quantité objective.

1°- Expression analytique de la loi.

Si on considère deux repères en mouvement l'un par rapport à l'autre, dans lesquels $\hat{\underset{\sim}{\sigma}} = f\,(\underset{\sim}{d},\ \underset{\sim}{\sigma},\ \rho)$ et $\hat{\underset{\sim}{\sigma}}^{*} = f\,(\underset{\sim}{d}^{*},\ \underset{\sim}{\sigma}^{*},\ \rho)$ sont les expressions de la loi, le principe d'objectivité conduit aux relations

$$\hat{\underset{\sim}{\sigma}}^{*} = Q\ \underset{\sim}{\sigma}\ Q^{t} = f\,(Q\ \underset{\sim}{d}\ Q^{t},\ Q\ \underset{\sim}{\sigma}\ Q^{t},\ \rho) = Q\ f\,(\underset{\sim}{d},\ \underset{\sim}{\sigma},\ \rho)\ Q^{t}$$

où Q est la rotation relative des deux repères. La dernière égalité montre que $f\,(\underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{\sigma}, \rho)$ doit être une fonction tensorielle isotrope des tenseurs $\underset{\sim}{\sigma}$ et $\underset{\sim}{d}$. Elle admettra donc, d'après les résultats de la première partie (A. 5.11) la représentation

$$\begin{aligned} f\,(\underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{\sigma}, \rho) = {} & a_0\,\underset{\sim}{\delta} + a_1\,\underset{\sim}{d} + a_2\,\underset{\sim}{\sigma} + a_3\,\underset{\sim}{d}^2 + a_4\,\underset{\sim}{\sigma}^2 \\ & + a_5(\underset{\sim}{d}\,\underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{\sigma}\,\underset{\sim}{d}) + a_6\,(\underset{\sim}{d}^2\,\underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{\sigma}\,\underset{\sim}{d}^2) + a_7(\underset{\sim}{d}\,\underset{\sim}{\sigma}^2 + \underset{\sim}{\sigma}^2\,\underset{\sim}{d}) \\ & + a_8(\underset{\sim}{d}^2\,\underset{\sim}{\sigma}^2 + \underset{\sim}{\sigma}^2\,\underset{\sim}{d}^2) \end{aligned} \qquad (2.2)$$

où les a_i sont des fonctions scalaires des 10 invariants de $\underset{\sim}{d}$ et $\underset{\sim}{\sigma}$ définis en (A.5.5) et de la densité ρ .

2°- Condition d'homogénéité par rapport au temps.

Nous avons admis que le temps t n'intervenait pas explicitement dans les équations de comportement : t doit être considéré comme un paramètre servant à repérer les états successifs de déformation. Nous devons donc imposer à la relation (2.2) d'être homogène et de degré -1 par rapport au temps. Il en résulte que les fonctions a_0, a_2, a_4 devront être homogènes de degré -1, a_1, a_5 et a_7 de degré 0 et a_3, a_6, a_8 de degré $+1$.

Puisque dans la liste des 10 invariants construits avec $\underset{\sim}{d}$ et $\underset{\sim}{\sigma}$ sept font intervenir le tenseur $\underset{\sim}{d}$, les conditions d'homogénéité écrites dans une forme analogue à celle employée en (B.3.b) montrent que les a_i pourraient être écrites en fonction de six paramètres sans dimensions analogues aux paramètres s et t définis en (B.3.12) et des trois invariants S_1, $\bar{S}_2$ et $\bar{S}_3$.

La forme (2.2) est beaucoup trop générale et le nombre des fonctions inconnues trop important pour que l'on puisse obtenir des résultats concrets. Nous ne retiendrons de (2) que la forme simplifiée qui permet, pour des déformations infinitésimales, d'obtenir une loi tangente à celle de l'élasticité linéaire, et pour de grandes déformations, une loi tendant vers une loi linéaire de plasticité parfaite. Les expériences effectuées par HAYTHORNTHWAITE semblent en effet montrer la proportionnalité des déviateurs des tenseurs $\underset{\sim}{\sigma}$ et $\underset{\sim}{d}$. Nous étudierons le cas où la relation (2.2) se réduit à

$$\hat{\underset{\sim}{\sigma}} = a_0 \underset{\sim}{\delta} + a_1 \underset{\sim}{d} + a_2 \underset{\sim}{\sigma} \tag{2.3}$$

où les a_i sont encore des fonctions scalaires des 10 invariants de $\underset{\sim}{\sigma}$ et $\underset{\sim}{d}$ et de la densité ρ.

Afin de réduire le nombre des arguments des fonctions a_i, on admettra pour les fonctions a_0 et a_2 une forme linéaire en $\underset{\sim}{d}$, satisfaisant ainsi à la condition d'homogénéité par rapport au temps formulée précédemment. Nous aurons

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0 \quad E_1 + \alpha_3 \bar{M} + \alpha_5 \bar{N} \\ a_2 &= \alpha_2 \quad E_1 + \alpha_4 \bar{M} + \alpha_6 \bar{N} \\ a_1 &= \alpha_1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \bar{\sigma}_{ij} \quad \bar{d}_{ij} \\ \bar{N} &= \bar{\sigma}_{ij} \quad \bar{\sigma}_{jk} \quad \bar{d}_{ki} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Les fonctions scalaires α_i, apparaissant dans (2.4), ne dépendent plus que des invariants du tenseur contrainte, et de la densité ρ

$$\alpha_i = \alpha_i (S_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3, \rho)$$

Remarquons que la forme linéaire des relations (2.4) constitue une hypothèse supplémentaire, et n'est pas une conséquence directe de la condition d'homogénéité. Si on avait demandé à la fonction f $(\underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{\sigma})$, en plus de la condition d'homogénéité, d'être continuement différentiable au voisinage de $d_{ij} = 0$, on aurait obtenu pour f une fonction tensorielle linéaire par rapport à $\underset{\sim}{d}$. La relation (2. 3), compte-tenu de (2.4) en est un cas particulier.

3°- Décomposition de la loi et interprétation.

La relation (2.3), décomposée en parties isotrope et déviatoire, s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ii} &= k_0 E_1 + k_3 \bar{M} + k_5 \bar{N} \\ \hat{\bar{\sigma}}_{ij} &= k_1 \bar{d}_{ij} + (k_2 E_1 + k_4 \bar{M} + k_6 \bar{N}) \bar{\sigma}_{ij} \end{aligned} \qquad (2.6)$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} k_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 S_1 + 3 \alpha_0 \\ k_3 &= 3 \alpha_3 + \alpha_4 S_1 \\ k_5 &= 3 \alpha_5 + \alpha_6 S_1 \end{aligned} \qquad (2.7)$$

$$k_i = \alpha_i \quad \text{si} \quad i = 1, 2, 4, 6$$

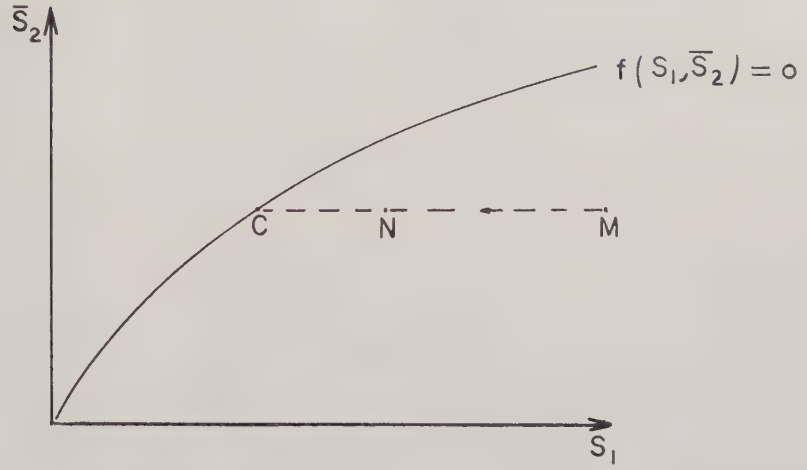
La relation (2.6_1) montre que la vitesse de variation de volume E_1 est égale à

$$E_1 = \left(\frac{d S_1}{dt} - k_3 \bar{M} - k_5 \bar{N}\right) \frac{1}{k_0} \qquad (2.8)$$

E_1 est due d'une part à la variation de la pression isotrope S_1, et d'autre part à la partie déviatoire de l'état de contrainte qui intervient par les invariants $\bar{M}$ et $\bar{N}$. Ce résultat est à rapprocher de celui obtenu dans l'étude d'une loi parfaitement plastique : une variation de volume due au déviateur de contrainte apparaît pour des matériaux dont la surface limite de plasticité est fonction de la pression moyenne, ce qui précisément est le cas des sols.

Remarquons dans l'expression (2.6_2) que E_1 intervient dans la partie déviatoire de la loi. Des remarques précédentes on déduit que, si l'état de contrainte est isotrope, une variation de cet état de contrainte provoquera une déformation purement isotrope. Par contre, toute variation de la pression isotrope à partir d'un état de contrainte déviatoire sera accompagnée, non seulement d'une variation de volume, mais encore d'une variation de l'état déviatoire de déformation. Ce résultat est important pour des matériaux dont la résistance dépend de la pression isotrope.

$\frac{\bar{S}_3}{\bar{S}_2}$ = cte, est donnée par $\bar{S}_2 = \bar{S}_2(S_1)$, comme illustré sur la figure ci-dessous.



Partant de l'état de contrainte représenté par le point M, et en ne faisant varier que la pression isotrope S_1, on peut se rapprocher de l'état limite $f(S_1, \bar{S}_2) = 0$ en suivant le trajet MN. Si le matériau obéit à une loi de la forme (2.6), nous voyons que le long de ce trajet, à $\bar{S}_2$ = cte, la variation de S_1 entraînera un changement de l'état déviatoire de déformation qui pourra devenir de plus en plus important à mesure que le point N se rapproche de l'état limite. Ce résultat est dû à la présence de E_1 dans la relation (2.6_2), à condition que k_2 ne soit pas nulle.

Les fonctions k_2, k_3 et k_5 jouent un rôle important pour les variations de volume, et suivant leurs valeurs, les relations (2.6) peuvent décrire des phénomènes différents. Ainsi, si k_2, k_3 et k_5 sont nulles, nous voyons que la loi de comportement (2.3) se décompose en deux : une loi pour les parties isotropes, et une loi pour les parties déviatoires des tenseurs $\underset{\sim}{\mathcal{E}}$ et $\underset{\sim}{d}$.

Si $k_2 = 0$, et si k_3 et k_5 ne sont pas toutes deux nulles, la variation de volume peut alors être provoquée par la variation de la pression isotrope et de l'état déviatoire de contrainte, mais la partie déviatoire de la déformation ne provient dans ce cas que de la variation de la partie déviatoire de l'état de contrainte et sera par conséquent indépendante de la variation de la pression isotrope.

On peut essayer de relier certaines fonctions qui apparaissent dans les relations (2.6), aux coefficients d'élasticité de la loi de HOOKE. Remarquons tout d'abord que dans le cas où les déformations sont infinitésimales et irrotationnelles, les composantes d_{ij} de la vitesse de déformation sont peu différentes des dérivées par rapport au temps des composantes de la déformation ε_{ij}

$$d_{ij} \simeq \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{2.9}$$

où les u_i sont les composantes du déplacement. L'opérateur $\hat{\sigma}_{ij}$ peut être approximé par $\frac{d \sigma_{ij}}{dt}$.

Sous ces hypothèses, et en supposant que l'état de contrainte est l'état neutre, les relations (2.6) se réduisent à :

$$\frac{d \sigma_{ij}}{dt} = \alpha_0 \frac{d \varepsilon_{kk}}{dt} \delta_{ij} + \alpha_1 \cdot \frac{d \varepsilon_{ij}}{dt} \tag{2.10}$$

si les autres termes des relations (2.6) peuvent être négligés.

L'intégration de (2.10) donne :

$$\sigma_{ij} = \alpha_0 \cdot \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \alpha_1 \cdot \varepsilon_{ij} + K_{ij} \tag{2.11}$$

où les K_{ij} sont des constantes d'intégration.

Puisque nous avons supposé le corps à l'état neutre, dans son état non déformé, les K_{ij} seront toutes nulles. On retrouve alors la relation classique de l'élasticité de HOOKE. Ceci suggère d'interpréter les coefficients α_1 et α_0 comme les coefficients de LAME 2 G et 3 λ . On peut alors interpréter le coefficient $\alpha_2 S_1$ comme un module de compressibilité isotrope "plastique" caractérisant la variation de volume irréversible due à la variation de la pression isotrope.

4°- *Grandes déformations. Etat critique.*

Quand un matériau comme le sol est soumis à des déformations importantes, l'expérience montre que l'état du matériau évolue vers "l'état critique" . Cet état peut être caractérisé par la surface critique d'équation

$$G\ (S_1\ ,\ \bar{S}_2,\ \bar{S}_3)\ =\ 0$$

et par la relation

$$\rho_c\ =\ \rho_c\ (S_1)$$

Sous certaines conditions que nous allons examiner, la loi de comportement (2.3) peut décrire le comportement du matériau à l'état critique.

a- Existence de l'état critique.

Des relations (2.6) nous pouvons obtenir les expressions des dérivées par rapport au temps des invariants de l'état de contrainte :

$$\hat{S}_1\ ,\ \hat{\bar{S}}_2^2\ \text{ et }\ \hat{\bar{S}}_3^3$$

On notera :

$$\hat{S}_1\ =\ \hat{\sigma}_{ii} \qquad \hat{\bar{S}}_2^{\,2}\ =\ 2\ \bar{\sigma}_{ij}\ \hat{\bar{\sigma}}_{ji} \qquad \hat{\bar{S}}_3^{\,3}\ =\ 3\ \bar{\sigma}_{ij}\ \bar{\sigma}_{jk}\ \hat{\bar{\sigma}}_{ki}$$

On obtient alors, à l'aide des relations (2.6) :

$$\hat{S}_1\ =\ (3\,\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2\ S_1)\ E_1\ +\ (3\,\alpha_3+\alpha_4\ S_1)\ \bar{M}\ +\ (3\,\alpha_5+\alpha_6\ S_1)\ \bar{N}$$

$$\frac{\hat{\bar{S}}_2^2}{2}\ =\ \alpha_2\ \bar{S}_2^2\ E_1\ +\ (\alpha_1+\alpha_4\ \bar{S}_2^2)\ \bar{M}\ +\ \alpha_6\ \bar{S}_2^2\ \bar{N} \qquad (2.12)$$

$$\frac{\hat{\bar{S}}_3^3}{3}\ =\ \alpha_2\ \bar{S}_3^3\ E_1\ +\ \alpha_4\ \bar{S}_3^3\ \bar{M}\ +\ (\alpha_1\ +\ \alpha_6\ \bar{S}_3^3)\ \bar{N}$$

Ce système peut être considéré comme un système de trois relations linéaires par rapport aux quantités E_1 , $\bar{M}$ et $\bar{N}$, qui sont les seuls invariants fonction de la vitesse de déformation qui apparaissent dans les relations (2.6).

Supposons alors connue la forme des α_i, comme fonction des invariants $\overline{S}_i$ et de la densité ρ .

Si le déterminant du système (2.12) n'est pas nul :

$$\frac{\Delta}{\alpha_1} = (3\alpha_0+\alpha_1).(\alpha_1+\alpha_4 \overline{S}_2^2+\alpha_6 \overline{S}_3^3) + \alpha_2 \left[\alpha_1 S_1 -3\alpha_3 \overline{S}_2^2 - 3 \alpha_5 \overline{S}_3^3\right] \quad (2.13)$$

les quantités E_1, $\overline{M}$ et $\overline{N}$ seront parfaitement déterminées en fonction de l'état de contrainte $\overline{S}_i$ et de sa variation instantanée $\hat{\overline{S}}_i$; la densité ρ du matériau est obtenue par intégration de l'équation de continuité :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = E_1$$

Les relations (2.6) permettent alors de connaître les composantes de $\underset{\sim}{d}$ en chaque point d'un trajet de charge en contrainte. Notons que l'écoulement du matériau ne peut avoir lieu à état de contrainte constant si $\Delta \neq 0$.

Examinons alors le cas où le déterminant Δ s'annule. La relation $\Delta = 0$ peut s'interpréter comme représentant l'équation d'une surface dans l'espace à quatre dimensions des $\overline{S}_i$ et de ρ .

En supposant que les coefficients α_1 et α_2 ne sont pas nuls, on constate que le mineur formé par les coefficients de E_1 et $\overline{N}$ des équations (2.12_2 et 2.12_3) a pour valeur $\Delta' = \alpha_1 \alpha_2 \overline{S}_2^2$, il ne sera nul que si l'état déviatoire est nul.

Retenant pour équations principales du système les relations (2.12_2) et (2.12_3) avec comme inconnues principales E_1 et $\overline{N}$, le système n'aura de solution que si le déterminant caractéristique correspondant Δ_c est nul.

$$\Delta_c = \hat{S}_1 \alpha_1 \alpha_2 \overline{S}_2^2 - \frac{\hat{\overline{S}}_2^2}{2} \left[(3\alpha_0+\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_6 \overline{S}_3^3) - 3\alpha_2\alpha_5 \overline{S}_3^3 + \alpha_1 \alpha_2 S_1\right]$$

$$+ \frac{\hat{\overline{S}}_3^3}{3} \left[(3\alpha_0+\alpha_1)(\alpha_6 \overline{S}_2^2) - 3\alpha_2 \alpha_5 \overline{S}_2^2\right] = 0 \quad (2.14)$$

Cette relation exprime que le chemin suivi se trouve sur l'hypersurface $\Delta = 0$.

Le système (2.12) admet alors pour solution :

$$E_1 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \bar{S}_2^2} \left\{ \frac{-\hat{\bar{S}}_3^3}{3} \alpha_6 \bar{S}_2^2 + \frac{\hat{\bar{S}}_2^2}{2} (\alpha_1 + \alpha_6 \bar{S}_3^3) - \bar{M} \alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_4 \bar{S}_2^2 + \alpha_6 \bar{S}_3^3) \right\} \quad (2.15)$$

$$\bar{N} = \frac{1}{\alpha_1 \bar{S}_2^2} \left\{ - \bar{S}_3^3 \frac{\hat{\bar{S}}_2^2}{2} + \bar{S}_2^2 \frac{\hat{\bar{S}}_3^3}{3} + \bar{M} \alpha_1 \bar{S}_3^3 \right\} \quad (2.16)$$

où $\bar{M}$ reste arbitraire.

L'interprétation de ces résultats va nous conduire à imposer certaines restrictions pour les fonctions α_i à l'état critique.

b- Ecoulement à état de contrainte constant.

Compte tenu des hypothèses faites précédemment, les relations (2.15) et (2.16) montrent qu'un écoulement est possible à état de contrainte constant : $\hat{\bar{S}}_i = 0$.

Remarquons alors que la relation $\Delta = 0$ détermine la densité ρ en fonction de l'état de contrainte. Si donc cet état est constant, l'écoulement devra avoir lieu à volume constant : $E_1 = 0$.

La relation (2.15) conduit à $(\alpha_1 + \alpha_4 \bar{S}_2^2 + \alpha_6 \bar{S}_3^3) = 0$ (2.17)

et puisque nous sommes dans le cas où $\Delta = 0$, de la relation (2.13) on obtient

$$(\alpha_1 S_1 - 3\alpha_3 \bar{S}_2^2 - 3 \alpha_5 \bar{S}_3^3) = 0 \quad (2.18)$$

Pour un écoulement à état de contrainte constant, les relations (2.17) et (2.18) doivent être satisfaites simultanément. Chacune de ces relations peut être interprétée comme représentant une hypersurface dans l'espace des $\bar{S}_i$ et de ρ. La densité ρ peut être obtenue en fonction de l'état de contrainte par l'une ou l'autre de ces relations. Il en résulte que les hypersurfaces (2.17) et (2.18) ont une intersection. Si celle-ci satisfait à certaines conditions de régularité, elle représente une surface $G(S_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3) = 0$ dans l'espace des invariants de $\mathcal{S}$.

Puisque en chaque point de cette surface, un écoulement à volume constant et à état de contrainte constant est possible, cette surface s'interprete comme la surface critique.

Les fonctions α_i, dont il est question dans les parties 5 b, c et 6, prennent les valeurs correspondant à l'état critique. On indiquera par la suite par l'indice c que les fonctions considérées sont relatives à l'état critique $(\alpha_i)_c$.

La relation (2.16) montre que, à l'état critique, si l'écoulement a lieu à contrainte constante,

$$\frac{\bar{M}}{\bar{N}} = \frac{\bar{S}_2^2}{\bar{S}_3^3} \qquad (2.19)$$

les équations de comportement (2.6) conduisent alors aux relations classiques de plasticité :

$$E_1 = 0 \qquad \bar{d}_{ij} = \lambda \bar{\sigma}_{ij} \qquad (2.20)$$

avec

$$\lambda = \frac{\bar{M}}{\bar{S}_2^2} = \frac{\bar{N}}{\bar{S}_3^3}$$

c- Trajet sur la surface critique.

Supposons que l'on impose au matériau de suivre un trajet situé sur la surface critique. Avec les restrictions (2.17) et (2.18) qui doivent alors être imposées, la relation (2.15) devient :

$$E_1 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left(-\frac{\hat{\bar{S}}_2^2}{2} \alpha_4 - \alpha_6 \frac{\hat{\bar{S}}_3^3}{3} \right) \qquad (2.21)$$

$\bar{N}$ et $\bar{M}$ étant toujours reliés par (2.16).

L'intensité du déviateur de $\underline{d}$ sera indéterminée puisque $\bar{M}$ reste arbitraire. Par contre, E_1 est parfaitement déterminé en fonction du trajet suivi sur la surface. Ce résultat est en accord avec le fait que la densité ρ_c est connue en chaque point de la surface critique.

On constate donc que les relations classiques de plasticité (2.20) ne sont pas applicables quand on effectue un trajet sur la surface critique. Il faut les remplacer par les relations (2.21) et (2.16).

5°- *Expression des fonctions α_i à l'état critique.*

Les fonctions α_i peuvent être reliées à l'équation de la surface critique $G(S_i) = 0$. En effet, quand l'état de contrainte est assujetti à rester sur la surface critique, on peut écrire :

$$\frac{\partial G}{\partial S_1}\,\hat{S}_1 + \frac{\partial G}{\partial \overline{S}_2^2}\,\hat{\overline{S}}_2^2 + \frac{\partial G}{\partial \overline{S}_3^3}\,\hat{\overline{S}}_3^3 = 0 \qquad (2.22)$$

d'où, en comparant avec la relation (2.14), on est conduit à :

$$\frac{\dfrac{\partial G}{\partial S_1}}{\alpha_1 \alpha_2 \overline{S}_2^2} = \frac{2 \cdot \dfrac{\partial G}{\partial \overline{S}_2^2}}{(3\alpha_0+\alpha_1)\alpha_4\,\overline{S}_2^2 + 3\alpha_2\,\alpha_5\,\overline{S}_3^3 - \alpha_1\,\alpha_2\,S_1} = \frac{3 \cdot \dfrac{\partial G}{\partial \overline{S}_3^3}}{\left[(3\alpha_0+\alpha_1)\alpha_6 - 3\alpha_2\,\alpha_5\right]\overline{S}_2^2} \qquad (2.23)$$

ce qui conduit avec (2.17) à :

$$(3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2\,S_1) = -\alpha_2\,\frac{2\,\overline{S}_2^2\,\dfrac{\partial G}{\partial \overline{S}_2^2} + 3\,\overline{S}_3^3\,\dfrac{\partial G}{\partial \overline{S}_3^3}}{\dfrac{\partial G}{\partial S_1}} \qquad (2.24)$$

Les fonctions α_i peuvent être précisées dans certains cas.

Cas particuliers.

a- Si la fonction G est une fonction homogène par rapport à S_1, $\overline{S}_2$ et $\overline{S}_3$:

$$\frac{\partial G}{\partial S_1}\,S_1 + 2\,\frac{\partial G}{\partial \overline{S}_2^2}\,\overline{S}_2^2 + 3\,\frac{\partial G}{\partial \overline{S}_3^3}\,\overline{S}_3^3 = 0$$

(2.24) conduit à

$$3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2\,S_1 = \alpha_2\,S_1$$

soit

$$\alpha_1 + 3\alpha_0 = 0 \qquad (2.25)$$

quand l'état critique est atteint.

Dans ce cas (2.23) donne

$$\alpha_3 = \frac{-\frac{2}{3}\alpha_1 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_2^2}}{\frac{\partial G}{\partial S_1}} \qquad \alpha_5 = \frac{-\alpha_1 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_3^3}}{\frac{\partial G}{\partial S_1}} \tag{2.26}$$

b- Examinons le cas particulier où la densité critique ne dépend que de la pression moyenne S_1.

En tirant $\bar{S}_3^3$ de (2.14) et en reportant sa valeur dans (2.21), on peut exprimer E_1 en fonction de S_1 et $\bar{S}_2^2$. On obtient :

$$E_1 = \frac{\alpha_6 \bar{S}_2^2 \hat{S}_1 - (3\alpha_5 + \alpha_6 S_1) \frac{\hat{S}_2^2}{2}}{\left[(3\alpha_0 + \alpha_1)\alpha_6 - 3\alpha_2\alpha_5\right]\bar{S}_2^2} \tag{2.27}$$

On voit que si E_1 ne dépend que de S_1

$$(3\alpha_5 + \alpha_6 S_1) = 0 \tag{2.28}$$

et d'après (2.17) et (2.18) on aura également

$$(3\alpha_3 + \alpha_4 S_1) = 0 \tag{2.29}$$

Dans ce cas E_1 sera donné par

$$E_1 = \frac{\hat{S}_1}{(3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 S_1)} \tag{2.30}$$

On obtient alors de (2.25) les expressions

$$\alpha_4 = \frac{-2\alpha_1 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_2^2}}{2\bar{S}_2^2 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_2^2} + 3\bar{S}_3^3 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_3^3}} \qquad \alpha_6 = \frac{-3\alpha_1 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_3^3}}{2\bar{S}_2^2 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_2^2} + 3\bar{S}_3^3 \frac{\partial G}{\partial \bar{S}_3^3}} \tag{2.31}$$

c- Dans le cas où les conditions a) et b) sont simultanément vérifiées, les fonctions α_4 et α_6 prennent la forme

$$\alpha_4 = \frac{2\,\alpha_1}{S_1} \cdot \frac{\dfrac{\partial G}{\partial \bar{S}_2^2}}{\dfrac{\partial G}{\partial S_1}} \qquad \alpha_6 = \frac{3\,\alpha_1}{S_1} \cdot \frac{\dfrac{\partial G}{\partial \bar{S}_3^3}}{\dfrac{\partial G}{\partial S_1}} \tag{2.32}$$

α_3 et α_5 ayant les formes (2.28) et (2.29).

6°- *Domaine d'application*

Nous venons de voir que sous certaines conditions, la relation (2.1) permettait de décrire un écoulement parfaitement plastique quand le matériau atteint l'état critique. Par un choix approprié des fonctions α_i, la relation (2.1) pourra décrire l'évolution continue du matériau depuis les déformations infinitésimales jusqu'aux très grandes déformations dues à l'écoulement plastique. Il faut maintenant apporter des restrictions sur le domaine d'application de cette relation.

Les expériences triaxiales montrent que si un échantillon, homogène et isotrope, est soumis à un cycle en déformation axiale où les trajets aller et retour s'effectuent suivant le même chemin, le trajet correspondant pour les contraintes présentent un point anguleux au moment de l'inversion du sens de la déformation. Cette constatation exclut la possibilité d'utiliser la même relation $\overset{\circ}{\underset{\sim}{\sigma}} = f\,(\underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{\sigma}, \rho)$ pour décrire les trajets aller et retour car pour les contraintes, le trajet retour s'effectuerait par le même chemin que le trajet aller.

On constate également que lors du premier cycle, les déformations réversibles sont en général très petites devant les déformations irréversibles.

La déformation plastique étant caractérisée par la valeur positive de la fonction dissipation, on peut envisager de définir le domaine d'application de la relation $\overset{\circ}{\underset{\sim}{\sigma}} = f\,(\underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{\sigma}, \rho)$ par la condition $D = \sigma_{ij}\, d_{ij} > 0$. Si cette condition n'est pas vérifiée, on peut pour l'instant compléter la loi du matériau par un comportement rigide. Le deuxième principe de la thermodynamique se trouvera ainsi toujours respecté.

La fonction dissipation est égale à $D = \frac{S_1 E_1}{3} + \bar{M}$. Les relations (2.12) permettent de calculer E_1 et $\bar{M}$ en fonction des invariants $\bar{S}_i$, $\hat{\bar{S}}_i$ et de la densité ρ . La dissipation peut alors s'écrire sous la forme :

$$D = S_1 X + \hat{\bar{S}}_2^{\,2} Y + \hat{\bar{S}}_3^{\,3} Z$$

où X , Y et Z sont, par l'intermédiaire des α_i, fonctions des invariants de $\underset{\sim}{\sigma}$ et de ρ . Cette expression de D peut s'interpréter comme le produit scalaire des vecteurs :

$\vec{U}$: $(\hat{S}_1, \hat{\bar{S}}_2^{\,2}, \hat{\bar{S}}_3^{\,3})$ et $\vec{V}$: (X, Y, Z). $\vec{V}$ représente l'état actuel du matériau (pour l'état de contrainte et la densité) et $\vec{U}$ la variation instantanée de l'état de contrainte, (variation qui peut être imposée ou qui résulte de la vitesse de déformation suivant que les conditions frontières sont imposées en contrainte ou en vitesse). La condition $D > 0$ permet ainsi de définir à chaque instant les sollicitations (en contrainte ou en vitesse) qui peuvent être appliquées au matériau pour poursuivre un écoulement décrit par la relation (2.1).

7°- Choix des fonctions en dehors de l'état critique.

Les relations que nous avons obtenues au paragraphe 5 permettent de déterminer la forme de certaines fonctions α_i quand le matériau est à l'état critique.

En dehors de cet état, des hypothèses supplémentaires doivent être faites.

Il faut tout d'abord exclure l'hypothèse très simple qui consisterait à retenir pour ces fonctions les valeurs prises à l'état critique. En effet, on constate dans le cas b) que les variations de volume, en dehors de l'état critique, ne seraient dues qu'à la variation de S_1, ce qui ne correspond pas au comportement que nous voulons décrire.

Nous voyons d'après les relations (2.8) que le signe de la variation de volume provoquée par le cisaillement sera donné par le signe des quantités

$$(3\alpha_3 + \alpha_4 S_1) \quad \text{et} \quad (3\alpha_5 + \alpha_6 \bar{S}_1) \qquad (2.33)$$

Les contraintes de compression étant comptées positives, E_1 positif ou négatif correspond à une augmentation de densité (durcissement) ou à une diminution de densité (amollissement). Les quantités (2.33) doivent donc être > 0 ou < 0 suivant que la densité du matériau est $>$ ou $<$ à la densité critique.

Si on remarque également que seules les fonctions α_4 et α_6 interviennent dans la partie déviatoire de la loi et que dans les parties isotropes, $\overline{M}$ et $\overline{N}$ ont pour multiplicateurs les quantités (2.33), nous sommes amenés à faire les hypothèses suivantes :

1) Les fonctions $\alpha_3 \ldots, \alpha_6$ ont, en dehors de l'état critique, même expression formelle que dans l'état critique.

2) Les fonctions α_3 et α_5 sont reliées à la densité critique $\rho_c(S_1)$, et les fonctions α_4 et α_6 à la densité actuelle du matériau.

3) Remarquons que l'état de contrainte actuel apparaît dans les expressions (2.6) soit directement par les composantes σ_{ij}, soit dans $(\alpha_4 \overline{M} + \alpha_6 \overline{N})$ et $(\alpha_3 + \alpha_4 S_1)\overline{M} + (\alpha_5 + \alpha_6 S_1)\overline{N}$, par les invariants $\overline{M}$ et $\overline{N}$ ou par les invariants S_1 , arguments des fonctions α_i.

   Puisque nous avons choisi dans le développement (2.3) de $f(\underline{d}, \underline{\underline{\sigma}})$ une forme linéaire par rapport à $\underline{\underline{\sigma}}$, on imposera aux expressions précédentes d'être de degré un par rapport à l'état de contrainte actuel. Ceci nous conduit à demander aux fonctions α_3 , α_4 et α_5, α_6 d'être respectivement des fonctions homogènes de degré 0 , -1, et -2 par rapport à l'état de contrainte actuel.

8°- Application au milieu pulvérulent.

Si nous retenons pour expression de la surface critique la relation (5.21) ,

$$(\overline{S}_2)_c = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\ S_1\ (K_c - 1)\ \ 2^m}{(D)_c^m} \qquad (2.34)$$

où $K_c = \dfrac{3 + \sin \phi_c}{3 - \sin \phi_c}$ $\qquad D_c = (K_c^{\frac{1}{m}} + 1) - \sqrt{6}\ (K_c^{\frac{1}{m}} - 1)\ (\dfrac{\overline{S}_3}{\overline{S}_2})^3$

Nous constatons que (2.34) est homogène d'ordre zéro par rapport aux invariants $\overline{S}_i$. Les fonctions α_3 et α_5 seront alors données par (2.26). Si en plus on admet que $\rho_c = \rho_c(S_1)$, alors α_4 et α_6 seront données par (2.32).

On obtient, en prenant pour ϕ la valeur constante ϕ_c, les expressions des fonctions $\alpha_3 \ldots \alpha_6$ à l'état critique : $\rho = \rho_c$ $G(S_1, S_2, S_3) = 0$.

$$(\alpha_4)_c = -\alpha_1 \frac{1}{(\bar{S}_2^2)_c} \left[1 + \frac{3\sqrt{6}\, m\, (K^{\frac{1}{m}} - 1)}{D_c} \cdot \left(\frac{\bar{S}_3}{\bar{S}_2}\right)_c^3 \right]$$

$$(\alpha_6)_c = 3\,\alpha_1 \frac{1}{(\bar{S}_2)_c} \frac{\sqrt{6}\, m\, (K_c^{\frac{1}{m}} - 1)}{D_c} \cdot \frac{1}{(\bar{S}_2^2)_c} \qquad (2.35)$$

$$(\alpha_3)_c = \frac{-(\alpha_4)_c(S_1)}{3}$$

$$(\alpha_5)_c = \frac{-(\alpha_6)_c(S_1)}{3}$$

En dehors de l'état critique, les fonctions α_i seront obtenues en appliquant les hypothèses formulées en (7). Les fonctions α_i seront fonctions de la densité par l'intermédiaire de la fonction ϕ. Comme nous l'avions exposé en (B.V.c), $\phi = \phi(\rho - \rho_c)$ où $\rho_c = \rho_c(S_1)$, ϕ prenant la valeur constante ϕ_c quand $\rho = \rho_c$. Nous obtiendrons donc pour les fonctions $\alpha_3 \ldots \alpha_6$,

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_1}{3} \left(\frac{S_1}{\bar{S}_2}\right) \cdot \frac{1}{(\bar{S}_2)_c} \left[1 + \frac{3\sqrt{6}\, m\, (K_c^{\frac{1}{m}} - 1)}{D_c} \cdot \left(\frac{\bar{S}_3}{\bar{S}_2}\right)^3 \right]$$

$$\alpha_5 = \frac{-\alpha_1 \sqrt{6}\, m\, (K_c^{\frac{1}{m}} - 1)}{D_c} \frac{1}{(\bar{S}_2)_c} \cdot \left(\frac{S_1}{\bar{S}_2^2}\right) \qquad (2.36)$$

$$\alpha_4 = -\alpha_1 \frac{1}{(\bar{S}_2)} \frac{1}{(\bar{S}_2)_\rho} \left[1 + \frac{3\sqrt{6}\, m\, (K_\rho^{\frac{1}{m}} - 1)}{D_\rho} \left(\frac{\bar{S}_3}{\bar{S}_2}\right)^3 \right]$$

$$\alpha_6 = 3\,\alpha_1 \sqrt{6} \frac{m\, (K_\rho^{\frac{1}{m}} - 1)}{D_\rho} \frac{1}{(\bar{S}_2)_\rho} \frac{1}{(\bar{S}_2^2)}$$

Les quantités K_c, $(\bar{S}_2)_c$ et D_c seront calculées par l'expression (2.34) où ρ aura la valeur ρ_c, en prenant pour S_1 et $\left(\frac{\bar{S}_3}{\bar{S}_2}\right)$ les valeurs de ces

invariants calculées à partir de l'état de contrainte actuel. K_ρ , $(\overline{S_2})_\rho$ et D_ρ seront obtenues de la même manière, ϕ prenant la valeur donnée par

$$\phi = \phi\ (\rho - \rho_c\ (S_1))$$

ρ et S_1 étant évidemment relatifs à l'état actuel.

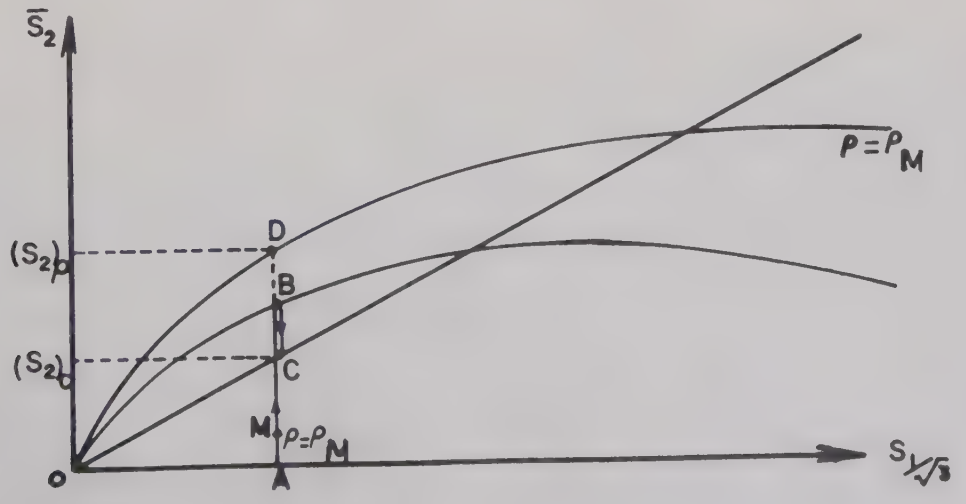
L'interprétation du choix fait pour les fonctions α_i peut être illustrée sur la figure suivante.

Soit M un point quelconque d'un trajet de charge dans l'espace des contraintes. L'état de contrainte de ce point est défini par les valeurs des invariants $(S_1)_M$, $(\overline{S}_2)_M$ et $\left(\frac{\overline{S}_3}{\overline{S}_2}\right)_M$.

Soit ρ_M la densité du matériau en M. L'intersection de la surface critique et du plan $(S_1, \overline{S}_2)$ correspondant à la valeur en M de $\frac{\overline{S}_3}{\overline{S}_2}$ est représentée par la droite OC, et celle de la surface de charge (5.21) correspondant à la densité ρ_M est donnée par la courbe OD.

On voit alors immédiatement que les fonctions α_i données par les expressions (2.35) sont proportionnelles au segment AC.

Pour les expressions (2.36) des α_i , on voit que les fonctions α_3 et α_5 seront proportionnelles à $\overline{AM}$ et $\overline{AC}$ et les fonctions α_4 et α_6 seront proportionnelles à $\overline{AM}$ et $\overline{AD}$. Le choix (2.36) qui a été fait permet de décrire une entrée progressive en plasticité, en choisissant les fonctions proportionnelles à AM , et de généraliser l'écrouissage en densité.



III- APPLICATION A QUELQUES ESSAIS DE MECANIQUE DES SOLS. COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE.

Dans l'analyse de la relation (2.3) que nous venons de faire, nous avons pu préciser la forme de certaines fonctions. Les hypothèses que nous avons été amené à faire concernant le travail des sols s'appuient sur les résultats expérimentaux généralement admis, bien que de nombreuses incertitudes subsistent ; elles sont dues notamment à l'interprétation problématique des essais.

En effet, dans l'interprétation des essais, on suppose l'homogénéité de la déformation et de l'état de contrainte. Or, jusqu'à ces dernières années, les essais de mécanique des sols ne respectaient pas cette condition. Un grand effort est fait actuellement pour y remédier, notamment dans l'essai dit "triaxial" qui est le plus utilisé.

Dans l'essai "triaxial classique", un état de contrainte de révolution est imposé, ce qui ne permet d'étudier qu'un seul chemin dans l'espace des contraintes.

Quelques tentatives ont été faites pour analyser la résistance au cisaillement sous des états de contraintes plus complexes : essais de torsion-compression sur des cylindres creux, ou essais de cisaillement. Dans tous les cas, la condition d'homogénéité pour la déformation est très difficile à réaliser.

Nous pensons que les recherches expérimentales doivent s'orienter vers l'étude d'un véritable essai triaxial ; des réalisations dans ce sens sont en cours à CAMBRIDGE par l'équipe de ROSCOE, et à KARLSRUHE par GUDEHUS. Dans cet essai, il est possible d'imposer la cinématique et de mesurer les contraintes qui doivent être appliquées pour la réaliser.

En plus de la condition d'homogénéité de la déformation, le mouvement auquel est soumis le matériau doit être sans accélération, afin de ne pas faire intervenir les forces d'inertie. Ces conditions conduisent à imposer certaines conditions cinématiques que nous allons examiner, pour présenter le problème sous sa forme complète, bien que, en général, la condition du mouvement sans accélération ne soit pas respectée, puisque n'ayant pas d'influence dans un mouvement quasi-statique.

1°- *Mouvement homogène sans accélération.*

Rapportons le mouvement à un système de coordonnées rectangulaires fixes : dans ce repère, en utilisant la description matérielle, un mouvement sera donné par une relation de la forme

$$z = \dot{z}\,(Z)\,t + Z \tag{3.1}$$

où z est la place au temps t de la particule qui occupait au temps $t = 0$ la place Z. Le point désigne la dérivée par rapport au temps, z et Z l'ensemble des coordonnées servant à repérer la même particule au temps t et au temps $t = 0$.

Si nous posons

$$\dot{z}\,(Z) = f\,(Z) \tag{3.2}$$

en tirant Z de (3.1), on obtient

$$z = f\,(z - \dot{z}.t)\,.\,t + z - \dot{z}\,.\,t \tag{3.3}$$

où

$$\dot{z} = f\,(z - \dot{z}\,.\,t) \tag{3.4}$$

C'est la relation fonctionnelle établie par CALDONAZZO [6] , condition nécessaire et suffisante pour qu'un mouvement soit sans accélération. En effet, par dérivation de (3.4), on obtient

$$\ddot{z}_k = f_{k,m}\,.\,(\dot{z}_m - \dot{z}_m - \ddot{z}_m\,.\,t) \tag{3.5}$$

où

$$\ddot{z}_m\ (\delta_{mk} + t\,f_{k,m}) = 0 \tag{3.6}$$

relation qui doit être vérifiée pour tout t, ce qui conduit à $\ddot{z} = 0$.

Imposons maintenant la condition d'homogénéité pour les vitesses : elle est donnée par

$$\dot{z} = a(t)\,.\,z + b\,(t) \tag{3.7}$$

où $a(t)$ est une matrice carrée et $b(t)$ une matrice colonne fonction du temps. Si le mouvement doit être en plus sans accélération, la condition $z = 0$ conduit à

$$(\dot{a} + a^2).\,z + \dot{b} + a\,b = 0 \tag{3.8}$$

Cette relation doit être vérifiée quels que soient a et b, d'où

$$\dot{a} + a^2 = 0 \tag{3.9}$$

et

$$\dot{b} + a\,b = 0 \tag{3.10}$$

La résolution de ce système (3.10) montre que a et b sont solutions de

$$(\delta + A\,t)\;a = A \tag{3.11}$$

$$(\delta + A\,.\,t)\;b = B \tag{3.12}$$

où A et B sont les valeurs initiales de a et b pour $t = 0$.

2°- *Essai de compression isotrope*.

Soumettons un échantillon au mouvement homogène donné par

$$\dot{z}_k = \epsilon(t)\,.\,z_k \tag{3.13}$$

où $\epsilon(t)$ est une fonction scalaire arbitraire du temps. Si la condition de mouvement sans accélération est imposée, la relation (3.11) conduit à

$$(1 + \epsilon(t=0)\,.\,t)\;\epsilon(t) = \epsilon(t=0) \tag{3.14}$$

d'où

$$\epsilon(t) = \frac{\epsilon(0)}{1 + \epsilon(0)\cdot t} \tag{3.15}$$

Si l'équation de continuité est introduite :

$$\dot{\rho} - \rho\, d_{kk} = 0 \tag{3.16}$$

où une diminution de volume est comptée positive, alors

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{3\,\epsilon(0)}{1 + \epsilon(0)\cdot t} \tag{3.17}$$

d'où

$$\rho = \rho_o\,(1 + \epsilon(0)\cdot t)^3 \tag{3.18}$$

où ρ_o est la densité initiale.

Pour ce mouvement, les équations de comportement (2.6) se réduisent à la seule relation

$$\hat{\sigma}_{ii} = k_0 \, E_1 \tag{3.19}$$

la seconde relation (2.6) étant vérifiée par $\bar{\sigma}_{ij} = 0$.

La vitesse de déformation se réduit à un tenseur isotrope

$$d_{ij} = \delta_{ij} \, \epsilon(t) \tag{3.20}$$

où $\epsilon(t)$ est donnée par (3.15). La pression isotrope qui devra être appliquée pour provoquer cette déformation est donnée par la solution de

$$\frac{d S_1}{dt} = (3 \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 S_1). \epsilon(t) \tag{3.21}$$

ou par

$$d S_1 = (3 \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 S_1) \frac{d\rho}{\rho} \tag{3.22}$$

Diverses tentatives ont été faites pour relier la compressibilité d'une masse de sable à la théorie des contacts élastiques de HERTZ . La déformation volumétrique est selon cette théorie reliée à la pression moyenne par une relation de la forme

$$C \left(\sigma_m\right)^{\alpha} \tag{3.23}$$

où C et α sont des constantes dépendant de la structure de l'empilement et des propriétés élastiques des grains. Si les grains sont assimilés à des sphères, alors $\alpha = \frac{2}{3}$. La comparaison de (3.23) avec les courbes expérimentales montre généralement un écart important. Cet écart subsiste encore si des modèles plus compliqués, dans lesquels le nombre de contacts entre grains augmente en fonction de la pression, sont utilisés (KO et SCOTT [19]).

Certains auteurs ont envisagé de déterminer globalement les coefficients de compressibilité : EL SHOLBY [12] , DOMASCHUK [9] . Ce dernier a notamment été conduit, par l'étude des courbes expérimentales, à introduire un module de compressibilité isotrope fonction de la pression moyenne

$$K = K_i + m \sigma_m \tag{3.24}$$

Par comparaison avec la loi (3.19), on voit que K_i est l'analogue de $3\,\alpha_0 + \alpha_1$ et m l'analogue de α_2.

Si, pour un certain domaine de variation de S_1 on peut assimiler les fonctions α_0, α_1 et α_2 à des constantes, la relation (3.19) conduit à

$$\rho = \rho_o \left(\frac{3\,\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2\, S_1}{3\,\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2\,(S_1)_o}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}} \qquad (3.25)$$

où ρ_o est la valeur de la densité du matériau quand $S_1 = (S_1)_o$.

Les coefficients α_2 et $(3\,\alpha_0 + \alpha_1)$ peuvent alors être déterminés par comparaison avec les courbes expérimentales. Cette hypothèse peut se justifier par la constatation que la densité ne varie que très légèrement avec la pression isotrope ; elle conduit à une bonne représentation de l'expérience si le domaine de pression S_1 auquel la relation (3.25) est appliquée n'est pas trop étendu. Dans le cas contraire, il faut diviser ce domaine en domaines partiels à l'intérieur desquels les coefficients α_2 et $(3\,\alpha_0 + \alpha_1)$ seront égalés à des constantes. Dans les expériences de DOMASCHUK [9], le domaine de variation de S_1 : $S_1 < 100$ p.s.i est divisé en deux.

Pour notre part, nous préférons prendre en compte la variation du coefficient α_1 avec la pression isotrope S_1. Pour une densité donnée, l'expérience semble montrer que α_1 varie comme $(S_1)^R$, la constante R étant voisine de 0,7. Le module de compressibilité isotrope est donc de la forme

$$K = 3\,\alpha_0 + (\alpha_1)_o\, S_1^R + \alpha_2\, S_1 \qquad (3.26)$$

La constante $3\,\alpha_0$ représenterait donc la valeur initiale de K pour $S_1 = 0$.

En pratique, la valeur $S_1 = 0$ ne peut être obtenue car les échantillons de matériau pulvérulent ne peuvent être formés que si une pression isotrope minimale est appliquée. Si ρ_o est la valeur de la densité sous la pression initiale $(S_1)_o$, la tangente à l'origine à la courbe $\rho(S_1)$ sera

$$\frac{\rho_o}{3\,\alpha_0 + (\alpha_1)_o\,(S_1)_o^R + \alpha_2\,(S_1)_o} \qquad (3.27)$$

Comparaison avec les résultats expérimentaux.

Nous avons comparé les résultats expérimentaux de DOMASCHUK aux résultats théoriques obtenus par intégration de la relation (3.20). L'étude expérimentale portait sur une très large gamme de densité, la densité relative variant de 0,18 à 0,82, et sur une variation de pression moyenne allant de 0,5 à 100 p.s.i (0,035 à 6,9 bars).

Nous avons constaté qu'une bonne représentation des résultats expérimentaux était obtenue en prenant les coefficients α_0, $(\alpha_1)_I$ et α_2 fonctions linéaires de la densité initiale des échantillons.

Les valeurs des différents coefficients qui ont été utilisés pour le calcul des courbes théoriques sont données par la figure (4) ; les courbes théoriques sont comparées aux résultats expérimentaux sur la figure (3).

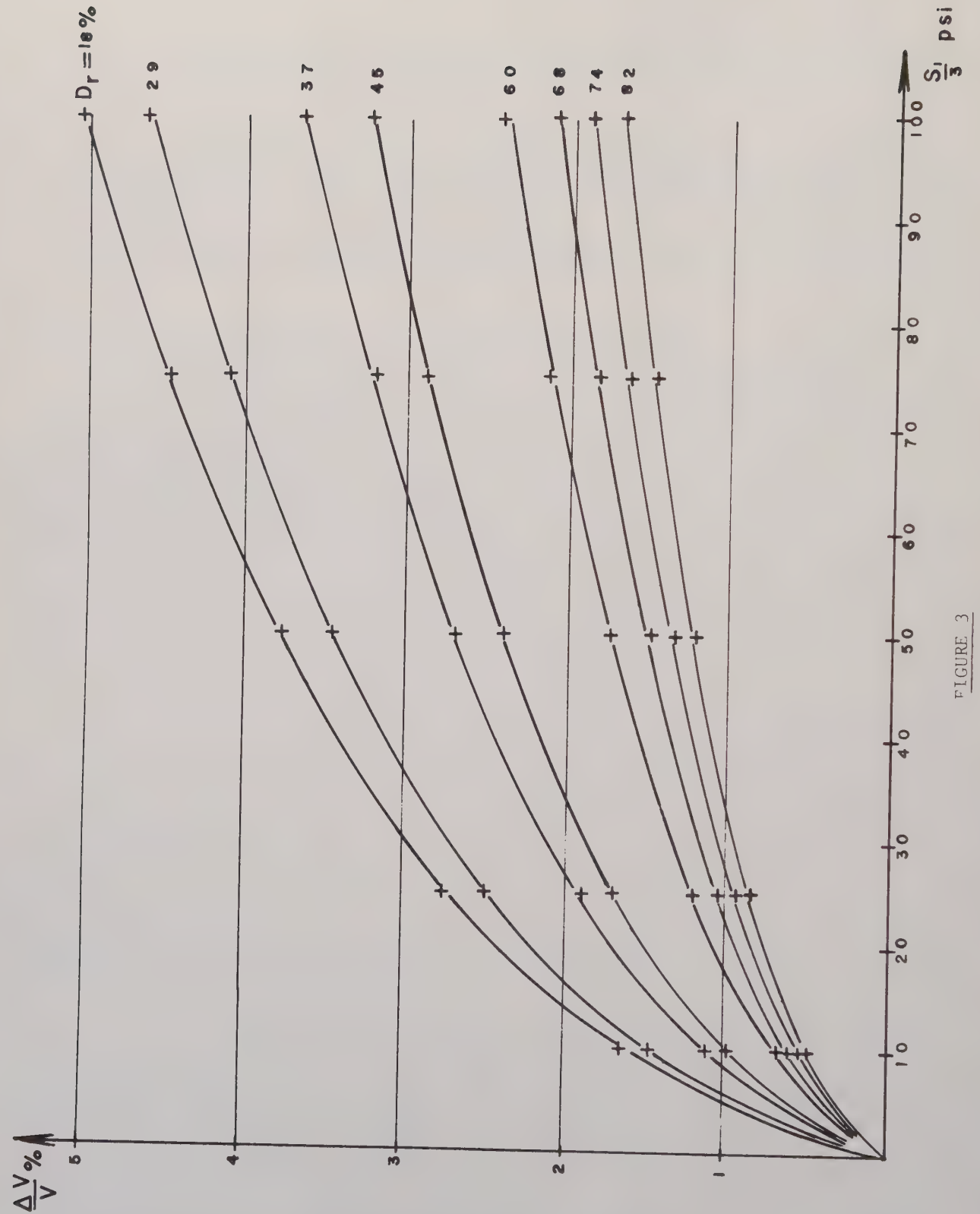

$\frac{\Delta V}{V}$ %
5
4
3
2
1
$D_r = 18\%$
29
37
45
60
68
74
82
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
$\frac{S_i}{3}$ psi

FIGURE 3

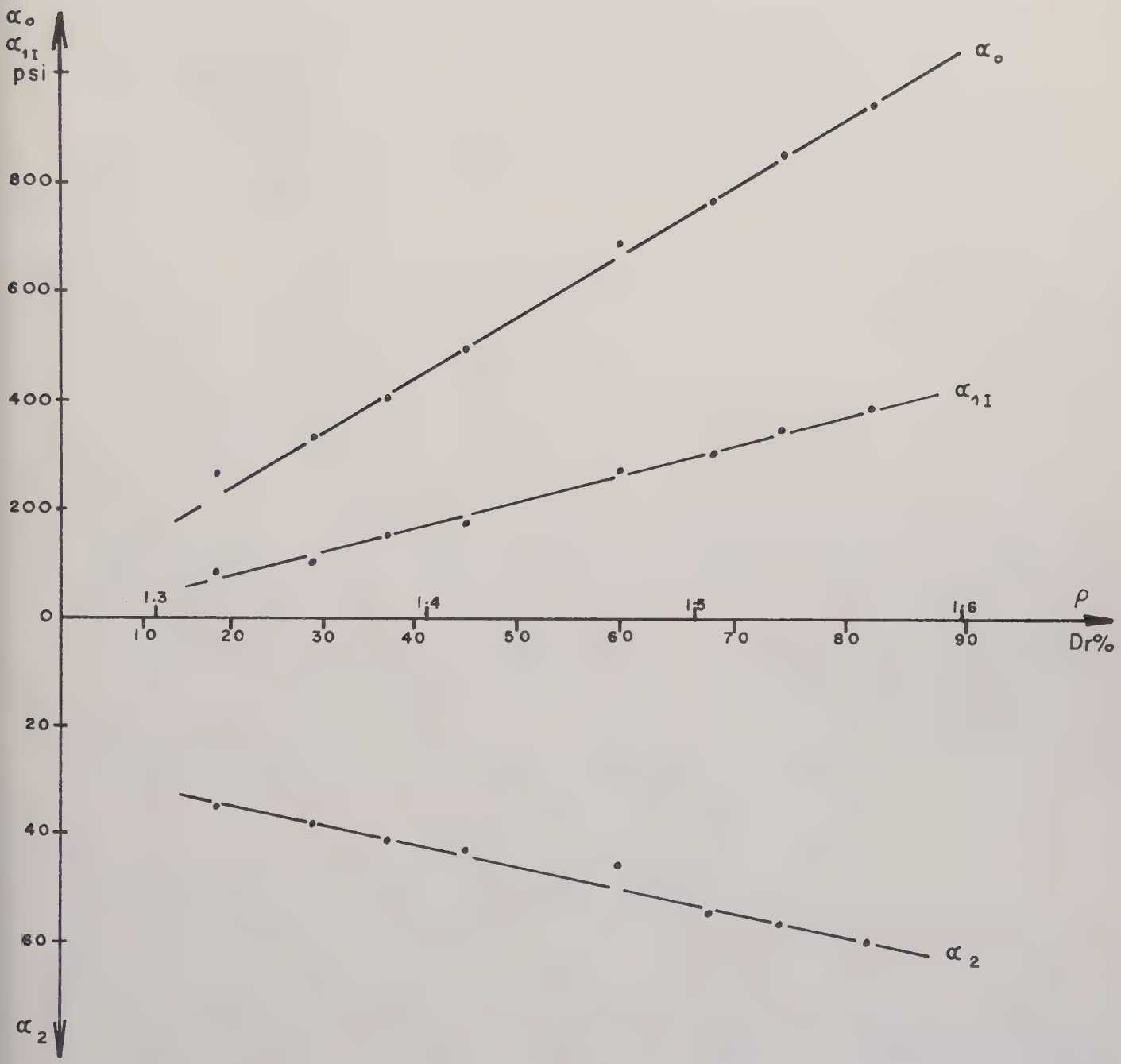

α_o
α_{1I}
psi
800
600
400
200
0
20
40
60
α_2
α_o
α_{1I}
α_2
1.3
1.4
1.5
1.6
ρ
10
20
30
40
50
60
70
80
90
Dr%

FIGURE 4

3°- Essais triaxiaux.

Considérons un échantillon dont la forme initiale est un cube d'arête l_o . Prenons pour origine d'un système de coordonnées rectangulaires l'un des sommets du cube. Dans une déformation homogène, le champ des vitesses est

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \dot{\epsilon}(t) & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\eta}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\nu}(t) \end{vmatrix} \cdot \vec{z} \qquad (3.28)$$

où $\dot{\epsilon}$, $\dot{\eta}$ et $\dot{\nu}$ sont des fonctions arbitraires du temps. Si on demande à ce mouvement d'être sans accélération, les fonctions doivent satisfaire la relation (3.11).

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{\epsilon_o}{1 + \epsilon_o t} \qquad \dot{\eta}(t) = \frac{\eta_o}{1 + \eta_o t} \qquad \dot{\nu}(t) = \frac{\nu_o}{1 + \nu_o t} \qquad (3.29)$$

Les quantités $\epsilon_o l_o$, $\eta_o l_o$ et $\nu_o l_o$ représentent les vitesses initiales des faces du cube situées à la distance l_o de l'origine, les faces passant par l'origine étant fixes.

On peut vérifier qu'au cours du mouvement, la vitesse de chaque particule reste constante, égale à sa vitesse initiale.

Pour pouvoir réaliser un mouvement sans accélération, il faut imposer des vitesses constantes aux faces mobiles (à notre connaissance, aucun essai de ce type n'a encore été réalisé).

Les essais "triaxiaux" de mécanique des sols sont en général réalisés sur des échantillons cylindriques. Une pression latérale uniforme est appliquée à l'échantillon, tandis que la vitesse de traction ou de compression est imposée constante pendant toute la durée de l'essai.

Pour réaliser cet essai sur un échantillon cubique, nous devrons imposer une vitesse constante à une seule des faces du cube, et une pression uniforme sur les autres faces. Nous voyons que les vitesses de ces faces seront variables au cours de l'essai, à moins que le matériau ne se déforme à volume constant. La condition de mouvement sans accélération n'est donc pas en général réalisée. Cependant, si les vitesses sont suffisamment petites, l'effet des forces d'inertie pourra être négligé.

Nous allons examiner successivement les deux types classiques d'essais triaxiaux, à "pression latérale constante" et à "pression moyenne constante". Dans le premier de ces essais, la pression uniforme qui est imposée sur certaines faces est constante pendant tout l'essai, tandis que dans le deuxième essai, cette pression est ajustée de manière à maintenir la pression S_1 constante.

Nous montrerons enfin, dans le cas de l'essai triaxial non drainé à pression latérale constante, sur un matériau saturé, que le calcul des pressions interstitielles s'obtient à partir de la loi (2.6), sans avoir à introduire des hypothèses supplémentaires.

La comparaison des résultats expérimentaux aux résultats prédits par la théorie nous permettra de justifier certaines hypothèses sur la forme des coefficients. En particulier, leur variation linéaire en fonction de la densité.

a) Essai triaxial à pression moyenne constante.

La pression moyenne S_1 étant maintenue constante, les variations de volume ne seront dues qu'à la partie déviatoire de l'état de contrainte. Cet essai est donc particulièrement bien adapté à l'étude des milieux granulaires, puisque pour ces matériaux des variations de volume relativement importantes apparaissent au cours d'un cisaillement (malheureusement, cet essai n'a été jusqu'à ce jour que très peu utilisé).

La distribution des vitesses sera donnée par la relation (3.28). Seule la composante de la vitesse V_x est imposée : $\dot{\epsilon}(t)$ est donc une fonction donnée du temps, tandis que $\dot{\eta}(t) = \dot{\nu}(t)$ est inconnue. Cette dernière fonction dépend uniquement des variations de volume en cisaillement du matériau.

Le tenseur vitesse de déformation $\underset{\sim}{d}$ correspondant à cette distribution des vitesses est $\underset{\sim}{d} = E_1 \underset{\sim}{\delta} + \underset{\sim}{\bar{d}}$, où les composantes de $\underset{\sim}{\bar{d}}$, dans le système d'axes choisi précédemment, seront

$$\bar{d}_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}(\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\eta} - \dot{\epsilon}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\eta} - \dot{\epsilon}}{3} \end{vmatrix} \qquad (3.30)$$

avec

$$E_1 = \dot{\epsilon} + 2\dot{\eta}$$

Les forces d'inertie, ainsi que les forces de volumes, étant négligeables devant les contraintes imposées à l'échantillon, les équations de l'équilibre indéfini $\sigma_{ij,j}$ seront vérifiées par tout le champ de contraintes homogène. Nous chercherons un champ de contraintes de la forme $\sigma_{ij} = \frac{S_1}{3}\delta_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \begin{vmatrix} T(t) & & \\ & \frac{-T(t)}{2} & \\ & & \frac{-T(t)}{2} \end{vmatrix} \qquad (3.31)$$

T étant une fonction du temps seul.

Le calcul des invariants $\overline{M}$ et $\overline{N}$ donne

$$\overline{M} = (\dot{\epsilon} - \dot{\eta})\, T \qquad \overline{N} = (\dot{\epsilon} - \dot{\eta})\, \frac{T^2}{2} \tag{3.32}$$

Les équations de comportement conduisent, pour la partie isotrope, à

$$(3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 S_1)(\dot{\epsilon} + 2\dot{\eta}) + (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) \left[(3\alpha_3 + \alpha_4 S_1) T + (3\alpha_5 + \alpha_6 S_1) \frac{T^2}{2} \right] = 0 \tag{3.33}$$

Pour la partie déviatoire, les trois équations (2.6) se réduisent à la seule relation :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2}{3}\alpha_1 (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) + \left[\alpha_2 (\dot{\epsilon} + 2\dot{\eta}) + \alpha_4 (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) T + \alpha_6 (\dot{\epsilon} - \dot{\eta}) \frac{T^2}{2} \right] T \tag{3.34}$$

$T(t)$ et $\dot{\eta}(t)$ sont les deux inconnues de ce problème.

A la place de la fonction $\dot{\eta}(t)$, nous choisirons comme inconnue la densité $\rho(t)$ du matériau

$$\dot{\epsilon} + 2\dot{\eta} = E_1 = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \tag{3.35}$$

Les relations (3.33) et (3.34) s'écrivent alors :

$$\frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{-3 \left[(3\alpha_3 + \alpha_4 S_1) T + 1/2 (3\alpha_5 + \alpha_6 S_1) T^2 \right] d\epsilon/dt}{2(3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 S_1) - (3\alpha_3 + \alpha_4 S_1) T - (3\alpha_5 + \alpha_6 S_1) T^2/2} \tag{3.36}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} \cdot \frac{2\alpha_1(3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 S_1) + (\alpha_4(3\alpha_0 + \alpha_1) - 3\alpha_2\alpha_3) T^2 + 3/2 \left[(3\alpha_0 + \alpha_1)\alpha_6 - 3\alpha_5\alpha_2 \right] T^3}{2(3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 S_1) - (3\alpha_3 + \alpha_4 S_1) T - (3\alpha_5 + \alpha_6 S_1) T^2/2} \tag{3.37}$$

Nous retiendrons pour les fonctions α_3, α_4, α_5 et α_6 les expressions (2.36).

Dans l'essai de compression triaxial, $\sqrt{6}\ \frac{\bar{S}_3^{\,3}}{\bar{S}_2^{\,3}}$ est égal à 1 : le critère d'écoulement (B.5.21) s'écrit dans ce cas

$$\bar{S}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\ \alpha\ S_1 \tag{3.38}$$

où :

$$\alpha = K - 1 \tag{3.39}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \alpha_4 + \frac{\alpha_6}{2}\ T &= \frac{-\alpha_1}{(\bar{S}_2)_\rho\ (\bar{S}_2)_a} \\ \alpha_3 + \frac{\alpha_5\ T}{2} &= \frac{\alpha_1\ S_1}{3\ (\bar{S}_2)_c\ (\bar{S}_2)_a} \end{aligned} \tag{3.40}$$

où

$$\begin{aligned} (\bar{S}_2)_c &= \sqrt{\frac{2}{3}}\ S_1\ (K_c - 1) \\ (\bar{S}_2)_a &= \sqrt{\frac{3}{2}}\ T \end{aligned} \tag{3.41}$$

avec :

$$(K_c - 1) = \frac{2\ \sin\phi_c}{3 - \sin\phi_c} \tag{3.42}$$

On posera, pour alléger l'écriture :

$$(\bar{S}_2)_c = \sqrt{\frac{2}{3}}\ \alpha_c\ S_1 \quad \text{et} \quad (\bar{S}_2)_\rho = \sqrt{\frac{2}{3}}\ \alpha_\rho\ S_1 \tag{3.43}$$

où α_c est défini par (3.42), tandis que α_ρ est une fonction de la densité actuelle ρ du matériau et de la pression isotrope S_1, avec $\frac{\partial \alpha_\rho}{\partial \rho} > 0$ et $\frac{\partial \alpha_\rho}{\partial S_1} < 0$.

Compte tenu des notations introduites ci-dessus, (3.36) et (3.37) s'écrivent :

$$\frac{dT}{dt} = \alpha_1\ \frac{d\epsilon}{dt}\cdot \frac{2\sqrt{3/2}\ (\alpha_1 + 3\alpha_0 + \alpha_2\ S_1) - 3T\ \left(\frac{\alpha_1 + 3\alpha_0}{\alpha_\rho\ S_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_c}\right)}{2\sqrt{3/2}\ (\alpha_1 + 3\alpha_0 + \alpha_2\ S_1) - \alpha_1\ (1/\alpha_c - 1/\alpha_\rho)} \tag{3.44}$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} = \frac{-3\,\alpha_1\,(\,{}^1/\alpha_c - {}^1/\alpha_\rho\,)\quad \frac{d\varepsilon}{dt}}{2\,\sqrt{3/2}\,(3\,\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2\,S_1) - \alpha_1\,(\,{}^1/\alpha_c - {}^1/\alpha_\rho)} \qquad (3.45)$$

On vérifie que si la densité initiale du matériau est supérieure ou inférieure à la densité critique ρ_c , la densité du matériau diminue ou augmente au cours du cisaillement, pour atteindre asymptotiquement la densité critique ρ_c .

T passe par des valeurs extrêmales données par :

$$T_m = \frac{\sqrt{2/3}\;(\alpha_1 + 3\alpha_0 + \alpha_2\,S_1)\;\alpha_c\;\alpha_\rho\;S_1}{(\,\alpha_1 + 3\alpha_0)\,\alpha_c + \alpha_2\,(\,\alpha_\rho\,S_1)} \qquad (3.46)$$

Pour la valeur critique de la densité, on obtient pour T la valeur

$$T_c = \sqrt{\frac{2}{3}}\;\;\alpha_c\;S_1 \qquad (3.47)$$

On constate bien que si α_ρ est supérieur à α_c (c'est-à-dire $\rho > \rho_c$), T passe par un maximum $T_m > T_c$, puis tend asymptotiquement vers la valeur T_c pour laquelle $\rho = \rho_c$. Par contre, si $\alpha < \alpha_c$, c'est-à-dire $\rho < \rho_c$, la courbe $T(\epsilon)$ est monotone, croissante, et tend vers la valeur T_c.

Les relations (3.44) et (3.45) décrivent donc bien les caractères principaux que nous avions retenus pour le comportement mécanique des milieux pulvérulents.

b) Essai triaxial à pression latérale constante.

Si la pression latérale est maintenue constante pendant tout l'essai, $\sigma_2 = \sigma_3 = P_o$, seule la contrainte σ_1 dans la direction où la vitesse d'écrasement (ou d'extension) est imposée varie ; la pression moyenne S_1 est donc variable au cours de l'essai. La variation de volume sera due d'une part, à la variation de la pression isotrope S_1, et d'autre part aux contraintes de cisaillement. Il est donc difficile dans cet essai d'analyser les deux effets.

Les tenseurs contrainte et déformation seront pris sous la forme (3.30) et (3.31), avec pour S_1 :

$$S_1 = \frac{3}{2} T + 3 P_o \qquad (3.48)$$

Les équations de comportement se réduisent encore, pour la partie déviatoire, à la relation (3.34), tandis que pour la partie isotrope, nous devons introduire dans le membre de droite de (3.33) la quantité $\frac{3}{2}\frac{dT}{dt}$. En choisissant pour inconnues T et ρ, on obtient :

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{3\frac{dT}{dt} - 3\frac{d\epsilon}{dt}\left[(3\alpha_3 + \alpha_4 S_1)T + (3\alpha_5 + \alpha_6 S_1)\frac{T^2}{2}\right]}{2(3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 S_1) - \left[(3\alpha_3 + \alpha_4 S_1)T + (3\alpha_5 + \alpha_6 S_1)\frac{T^2}{2}\right]} \qquad (3.49)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} \cdot \frac{(3\alpha_0 + \alpha_1)\left[2\alpha_1 + (\alpha_4 + \alpha_6 T/2)3T^2\right] + \alpha_2\left[2\alpha_1 S_1 - 9T^2(\alpha_3 + \alpha_5 T/2)\right]}{2(3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 S_1) + \alpha_1 - 3\alpha_2 T - (3\alpha_3 + \alpha_4 S_1)T - (3\alpha_5 + \alpha_6 S_1)T^2/2 + 3/2(\alpha_4 + \alpha_6 T/2)T^2}$$

(3.50)

Retenant encore pour expressions de $\alpha_4 + \alpha_6 T/2$ et $\alpha_3 + \alpha_5 T/2$ les expressions (3.40), on obtient, compte tenu de $S_1 = 3 P_o + 3/2 T$:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{3\sqrt{3/2}\cdot\frac{dT}{dt} - 3\,\alpha_1\cdot\frac{d\epsilon}{dt}\cdot\left(1/\alpha_c - 1/\alpha_\rho\right)}{2\sqrt{3/2}\cdot(3\alpha_0+\alpha_1+3\alpha_2 P_o) + 3\sqrt{3/2}\cdot\alpha_2\cdot T - \alpha_1\cdot\left(\frac{1}{\alpha_c}-\frac{1}{\alpha_\rho}\right)} \qquad (3.51)$$

$$\frac{dT}{dt} = \alpha_1\cdot\frac{d\epsilon}{dt}\cdot\frac{(3\alpha_0+\alpha_1+3\alpha_2 P_o).2\sqrt{3/2} + \left[(3\sqrt{3/2}\,\alpha_2 - \left(\frac{3\alpha_0+\alpha_1}{\alpha_\rho(P_o+T/2)}+\frac{\alpha_2}{\alpha_c}\right)\right]T}{2\sqrt{3/2}\cdot(3\alpha_0+\alpha_1+3\alpha_2 P_o) + \alpha_1\sqrt{3/2} + \alpha_1\left(\frac{P_o}{\alpha_\rho(P_o+T/2)}-\frac{1}{\alpha_c}\right)} \qquad (3.52)$$

On voit sur (3.51), et en comparant avec l'expression (3.45), que la variation de volume est due à la variation de la pression isotrope, représentée par le premier terme du membre de droite, et aux contraintes de cisaillement dont l'influence est caractérisée par le deuxième terme du membre de droite. Ces deux causes peuvent agir dans le même sens, si $\rho < \rho_c$, ou en sens inverse si $\rho > \rho_c$.

Ce résultat explique le comportement du matériau couramment observé dans l'expérience. Dans le premier cas, $\rho < \rho_c$, l'échantillon diminue constamment de volume ; la courbe de charge est monotone et tend asymptotiquement vers la valeur

$$T_c = \frac{2\,\alpha_c\,P_o}{\sqrt{2/3}-\alpha_c}$$

Dans le second cas où $\rho > \rho_c$, un compactage du matériau peut apparaître avant la phase d'augmentation de volume. La courbe de charge passe par un maximum avant d'atteindre asymptotiquement la valeur T_c.

c) Essai triaxial non drainé à pression latérale constante.

L'expérience montre que si un échantillon de sol saturé est soumis à un cisaillement au cours duquel aucun drainage n'est possible, des pressions interstitielles apparaissent dans l'échantillon. Celui-ci étant saturé et sans possibilité de drainage, son volume reste constant, si on néglige la compressibilité du fluide interstitiel et des grains. L'apparition d'une pression interstitielle s'explique par la tendance qu'a la structure du matériau à changer de volume au cours du cisaillement. Cette pression sera positive ou négative suivant que le squelette du matériau, sous les conditions qui lui sont imposées aura tendance à diminuer ou à augmenter de volume.

La prévision des pressions interstitielles, ainsi que celle de la résistance ultime du sol dans les conditions de non drainage sont d'une grande importance dans les problèmes pratiques de mécanique des sols. Aussi, différents auteurs ont essayé d'apporter une solution à ce problème. Citons notamment les travaux de SKEMPTON [32] et HENCKEL [52], et plus récemment de BOUTWELL [51]. Ce dernier auteur relie la pression interstitielle au déviateur de contrainte dans le cas où le matériau a atteint l'état critique.

Des travaux expérimentaux, on doit retenir que la résistance au cisaillement, et la valeur de la pression interstitielle dépendent essentiellement de la densité du matériau.

La théorie que nous avons construite pour décrire le comportement des milieux pulvérulents permet de calculer, à chaque stade de la déformation, la pression interstitielle et l'état de contrainte : la loi proposée décrit les propriétés de la seule phase solide du matériau.

On désignera par u la pression interstitielle, par $\underset{\sim}{\sigma}'$ le tenseur "contrainte intergranulaire" défini par $\underset{\sim}{\sigma}' = \underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{\delta}\, u$. Soit $\underset{\sim}{\bar{\sigma}}'$ et $\frac{S'_1}{3}$ les parties déviatoire et isotrope de $\underset{\sim}{\sigma}'$.

La déformation de la structure de l'échantillon ne dépendant que du tenseur $\underset{\sim}{\sigma}'$, la loi de comportement (2.6) conduit, pour un essai triaxial à pression

latérale constante ($\sigma_2 = \sigma_3 = P_o$) aux relations

$$\frac{dS'_1}{dt} = (3\,\alpha_3 + \alpha_4 S'_1)\,\bar{M} + 3\,(\alpha_5 + \alpha_6 S'_1)\,\bar{N}$$

$$\frac{d\,\bar{\sigma}'_1}{dt} = \alpha_1 \frac{d\,\varepsilon}{dt} + (\alpha_4 \bar{M} + \alpha_6 \bar{N})\,\bar{\sigma}'_1 \qquad (3.53)$$

où

$$S'_1 = \sigma'_1 + 2\,\sigma'_3 = \frac{3}{2}\,(\bar{\sigma}'_1 + 2\,(P_o - u))$$

$$\bar{M} = \frac{3}{2}\,\dot{\varepsilon}\,\bar{\sigma}'_1 \qquad \bar{N} = \frac{3}{4}\,\dot{\varepsilon}\,\bar{\sigma}'^{2}_1 \qquad (3.54)$$

Compte-tenu des relations (3.54) et des expressions (2.36) de $\alpha_3 \ldots \alpha_6$, le système (3.53) conduit à :

$$du = \frac{\alpha_1}{2}\left[1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\bar{\sigma}'_1}{\alpha_\rho\,(\bar{\sigma}'_1 + 2\,(P_o - u))} + \frac{1}{\alpha_\rho} - \frac{1}{\alpha_c}\right].d\varepsilon \qquad (3.55)$$

$$d\,\bar{\sigma}'_1 = \alpha_1\left[1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\bar{\sigma}'_1}{\alpha_\rho\,(\bar{\sigma}'_1 + 2\,(P_o - u))}\right] d\varepsilon \qquad (3.56)$$

La densité restant constante, la valeur du coefficient α_ρ ne dépendra que de S'_1. Le matériau évoluant au cours de la déformation vers l'état critique, α_ρ tend vers la constante α_c. $\bar{\sigma}'_1$ et u seront alors reliés, à l'état critique, d'après (3.55), par

$$\bar{\sigma}'_1\,(1 - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\alpha_c) = 2\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\alpha_c\,(P_o - u) \text{ avec } \bar{\sigma}'_1 = \alpha_c\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,S'_1$$

La connaissance de la loi $\rho_c = \rho_c\,(S'_1)$ permet de déterminer la valeur de S'_1 correspondante.

Réciproquement, cet essai permettra la détermination expérimentale de la loi de variation de la densité critique en fonction de S'_1.

d) Comparaison avec l'expérience.

L'application de la loi de comportement (2.6) à l'essai triaxial est basée sur l'hypothèse fondamentale de la déformation homogène de l'échantillon. Or, malgré les précautions que les expérimentateurs prennent pour supprimer le frettage exercé aux extrémités de l'échantillon, celui-ci se déforme en forme de "tonneau" et non selon une déformation homogène, en forme de "cylindre".

L'analyse des résultats expérimentaux est donc délicate et pour l'instant peu précise :

- la valeur de l'angle de frottement ϕ_c est théoriquement déterminée par la valeur du palier des courbes de charge ; ce palier n'est atteint que pour de grandes déformations où précisément la condition d'homogénéité est loin d'être réalisée.

- la densité mesurée est la densité moyenne de l'échantillon. Or, comme cela a bien été montré par WACK [41] pour l'essai triaxial et par ROSCOE [48] pour l'essai de cisaillement, certaines zones de l'échantillon, (près des deux extrémités) sont peu déformées et leur densité varie peu comparativement à la zone centrale où la déformation se localise entraînant de fortes variations de densité. Une grande incertitude demeure donc quant aux valeurs des densités mesurées, et donc en particulier pour la densité critique.

- le frettage des extrémités de l'échantillon, cause première du mode de déformation non homogène de l'échantillon, semble provoquer la diminution rapide de la résistance des échantillons après que le "pic" ait été atteint.

Malgré les difficultés rencontrées pour interpréter les essais de mécanique des sols, il était nécessaire de confronter les résultats expérimentaux aux résultats obtenus par le calcul théorique.

Nous avons tenté de retrouver, par intégration des systèmes différentiels (3.44, 45), (3.51, 52) et (3.55, 56) les courbes de charge effort-déformation, ainsi que l'évolution de la densité ou de la pression instertitielle, obtenues expérimentalement.

Pour les essais triaxiaux à pression latérale constante, drainés et non drainés, une comparaison a été faite avec les résultats expérimentaux de BOUTWELL [51]

Cet auteur a effectué plusieurs séries d'essais sur des échantillons d'un même sable, préparés à différentes densités.

L'étude de l'ensemble des résultats expérimentaux montre que :

- l'angle de frottement interne correspondant aux paliers des courbes de charge est voisin de 35° 30' ;
- la densité critique varie linéairement en fonction de la pression moyenne, comme le montre la figure (8) où sont portés les résultats des essais drainés et non drainés.

Pour la conduite des calculs théoriques, nous avons supposé que les coefficients α_ρ variaient linéairement en fonction de l'écart existant entre la densité actuelle et la densité critique correspondant à la valeur actuelle de S_1

$$\alpha_\rho = \alpha_c \left[1 + k \quad (\rho - \rho_c) \right]$$

Pour le coefficient α_1, nous avons retenu la même expression que celle employée pour les calculs de compression isotrope :

$$\alpha_1 = \alpha_{1\,I} \cdot \quad (S_1)^{2/3}$$

A partir de ces hypothèses, nous avons tenté de retrouver les résultats expérimentaux en faisant varier les valeurs des coefficients α_0, α_{1I}, α_2 et k. Les coefficients α_0, α_1 et α_2 doivent être considérés comme fonctions de l'état de contrainte et de la densité. En faisant tendre vers zéro de diverses façons la quantité $(3\alpha_0 + \alpha_1)$ pour satisfaire à la relation (2.25), nous avons constaté que des résultats numériques étaient très peu différents de ceux obtenus en gardant sa valeur constante. Pour chacune des comparaisons que nous avons faite, nous avons pu obtenir des valeurs des coefficients qui conduisaient à des courbes théoriques voisines de celles données par l'expérience, ces coefficients étant gardés constants dans chaque calcul.

Nous avons alors constaté que les coefficients α_0, α_{1I} et α_2 variaient linéairement en fonction de la densité initiale des échantillons, le coefficient k apparaissant comme une constante.

Les valeurs des coefficients qui ont été utilisés pour les calculs des courbes théoriques sont données par les figures (8 et 9). La comparaison des courbes théoriques et expérimentales est donnée par les figures (5) à (7) pour les essais drainés, et par les figures (10, 11) pour les essais non drainés.

Pour les essais à pression moyenne constante, nous avons utilisé les résultats de LE LONG [2 2]. Les essais, où la déformation était relativement homogène et où la pression moyenne gardait vraiment une valeur constante, étant peu nombreux, nous n'avons pu aboutir à des conclusions aussi riches que dans le cas précédent.

Les calculs des courbes théoriques correspondant aux essais de LE LONG ont été faits en prenant pour les fonctions de α_1 et α_ρ la même forme que précédemment. L'angle de frottement interne correspondant au palier a été pris égal à 28 °. La comparaison, avec les résultats expérimentaux est donnée sur les figures (12-13). Les calculs des courbes théoriques ont été faits en prenant les valeurs indiquées sur le tableau ci-dessous :

$\frac{S_1}{3}$	ϕ_c	ρ_c	ρ_i	α_0	α_{1I}	α_2	k	R
5 bars	28°	1.42	1.59	300	43	60	10	0,68
20 bars	28°	1.52	1.62	300	43	60	8	0,68
67 bars	28°	1.82	1.64	300	43	60	3	0,68
135 bars	28°	1.94	1.68	300	43	60	3	0,68

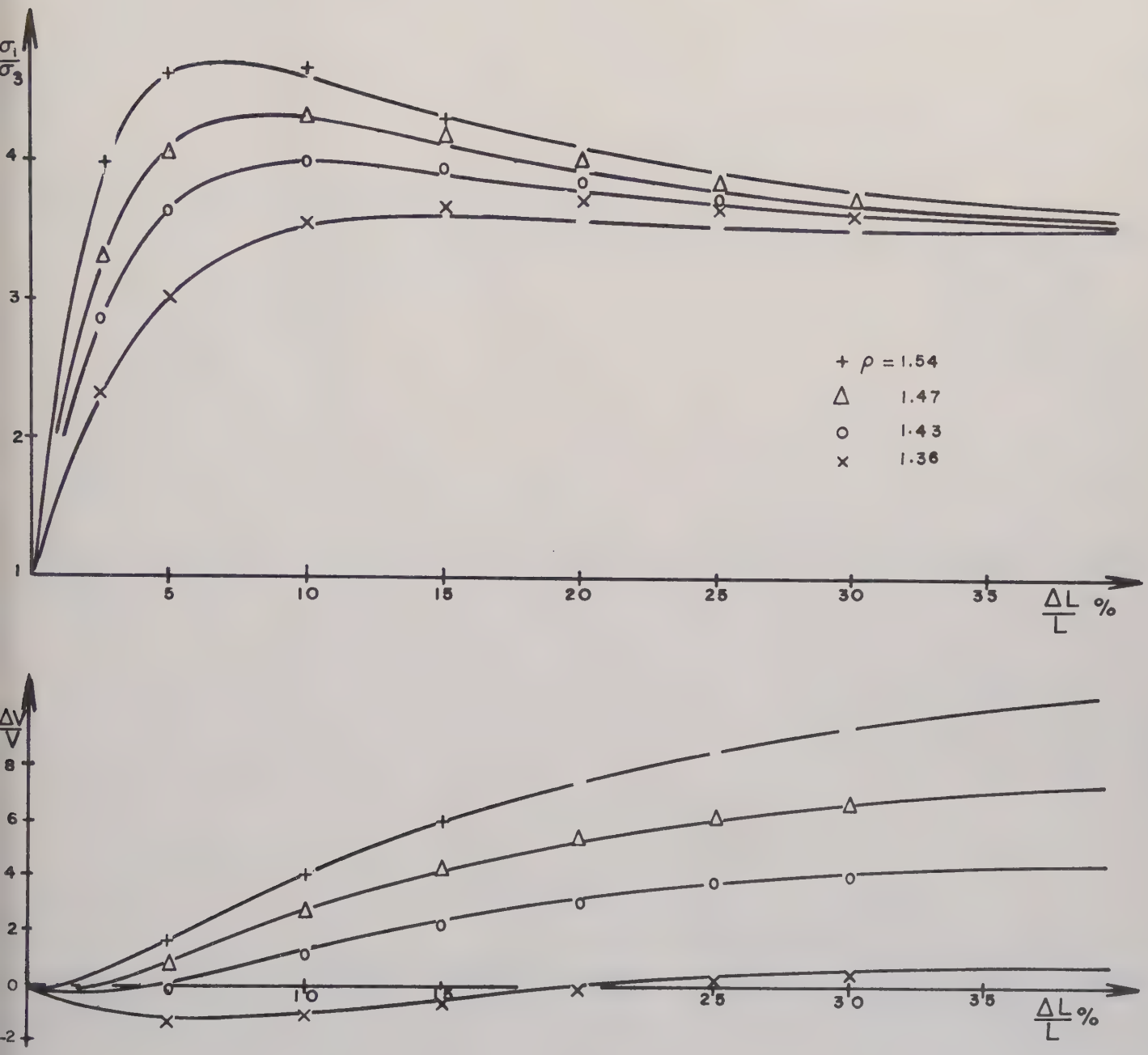
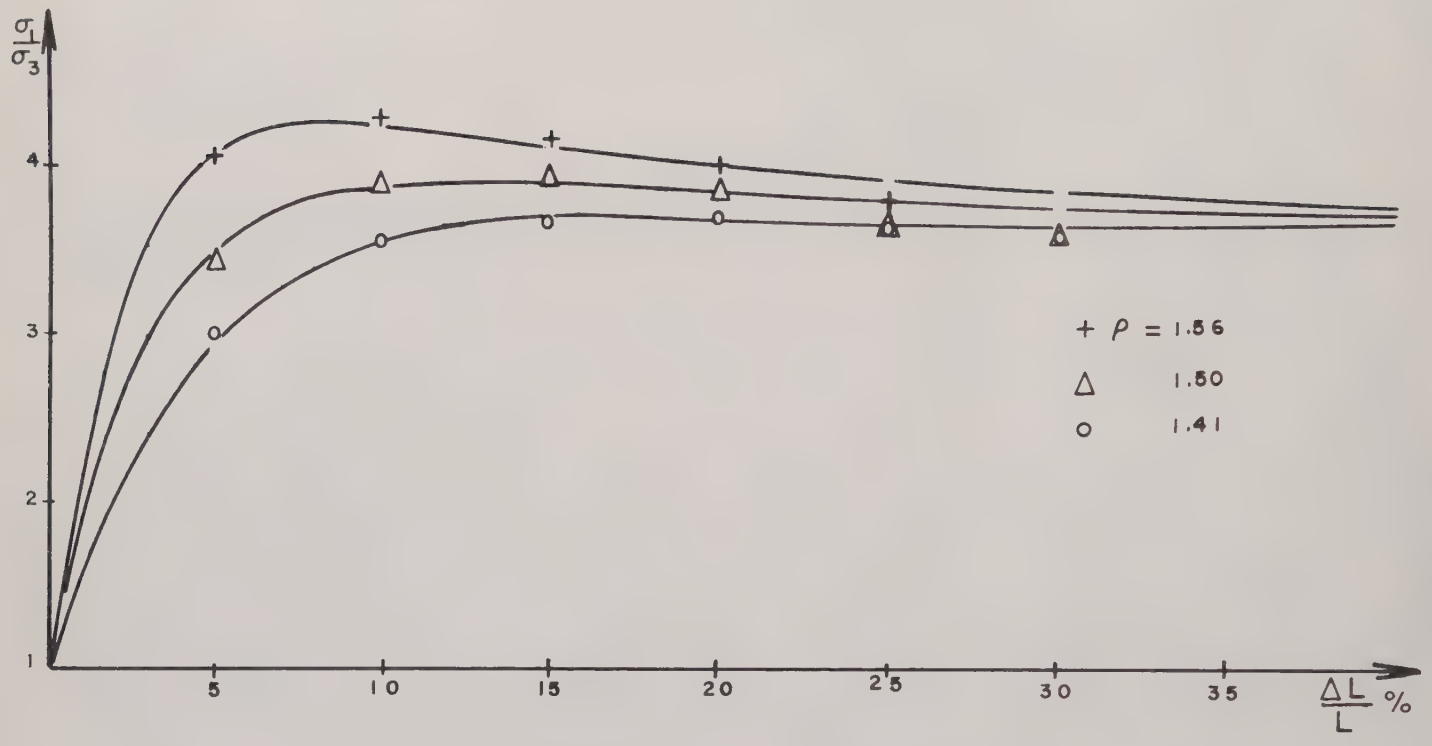


FIGURE 5

ESSAIS TRIAXIAUX : P_0 = 15 p.s.i.



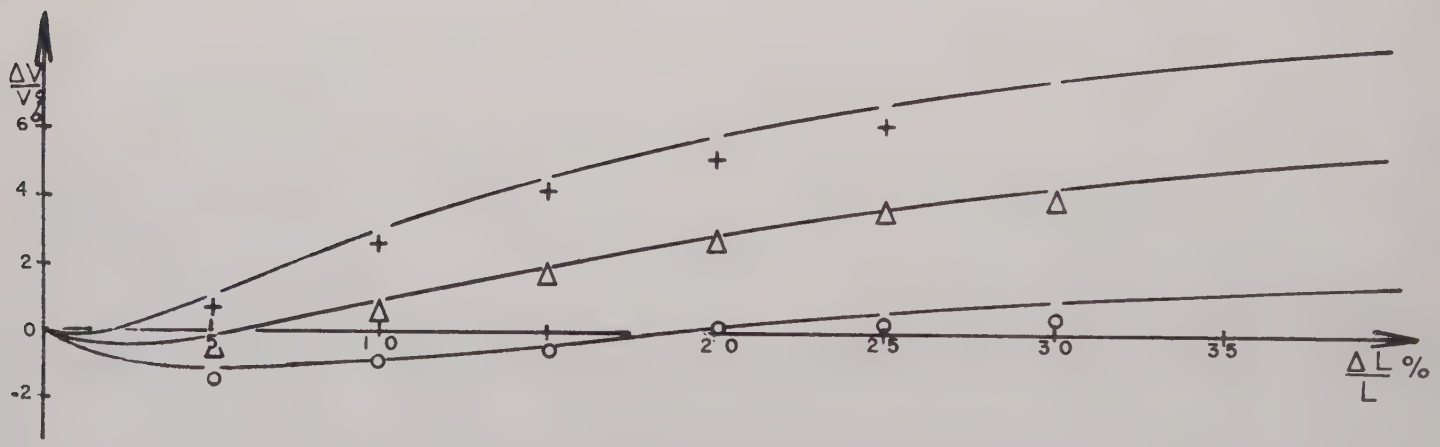
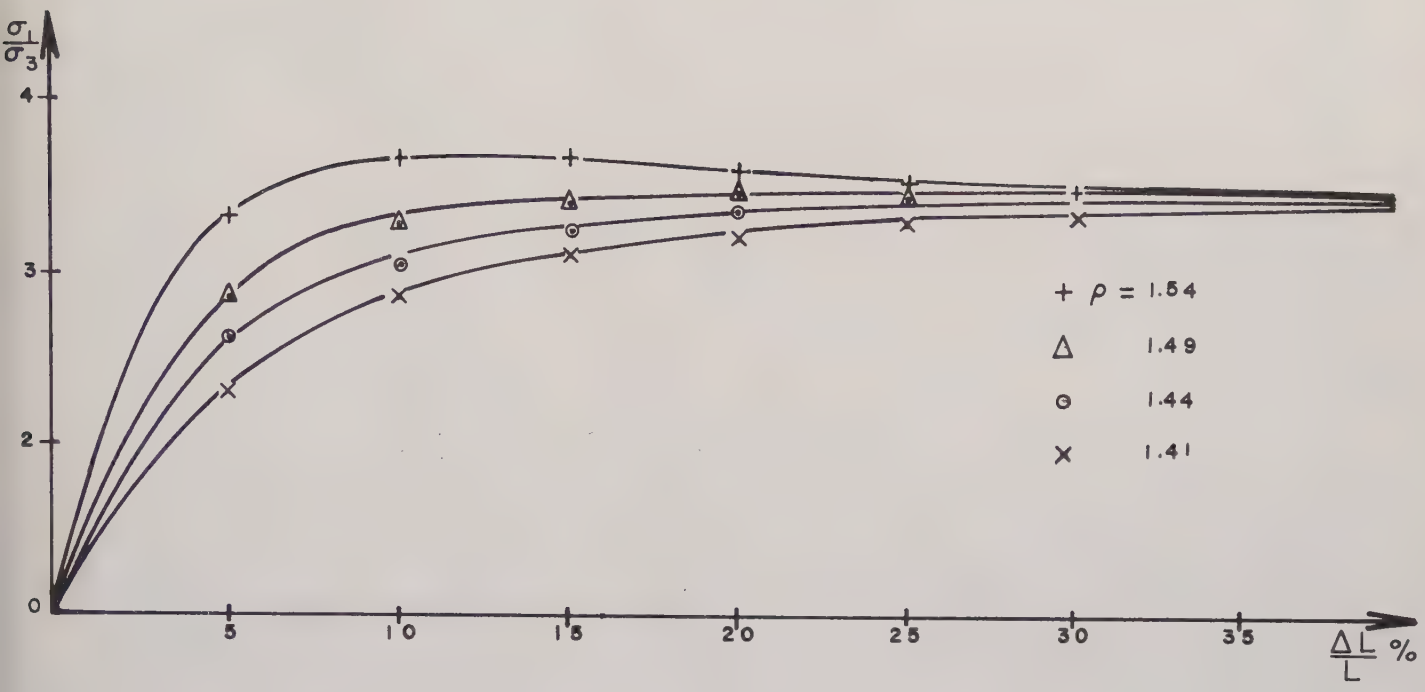


FIGURE 6

ESSAIS TRIAXIAUX : P_0 = 35 p.s.i.



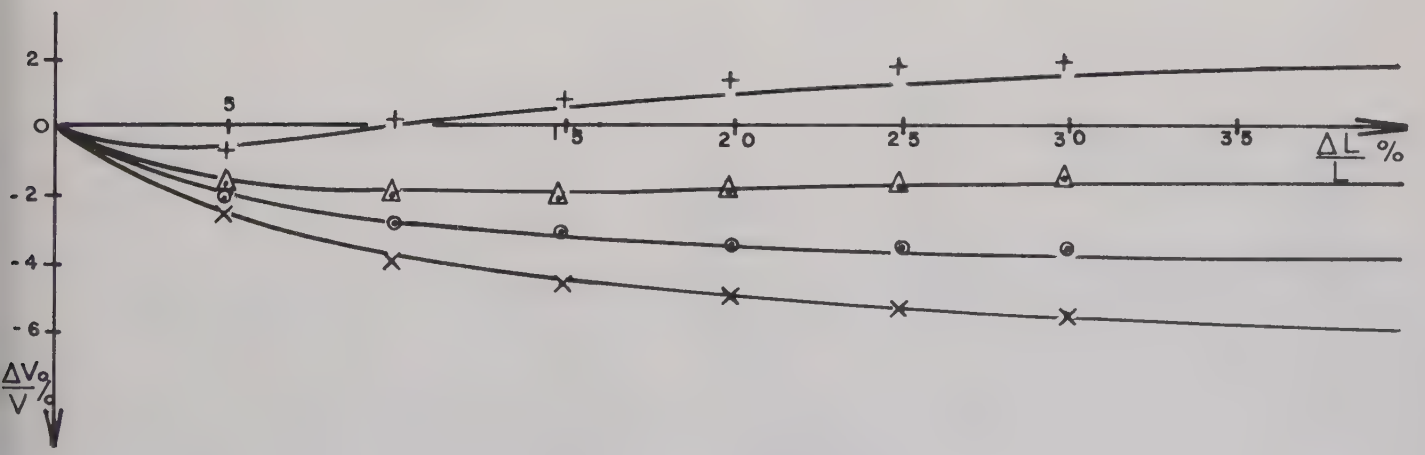


FIGURE 7

ESSAIS TRIAXIAUX : P_0 = 80 p.s.i.

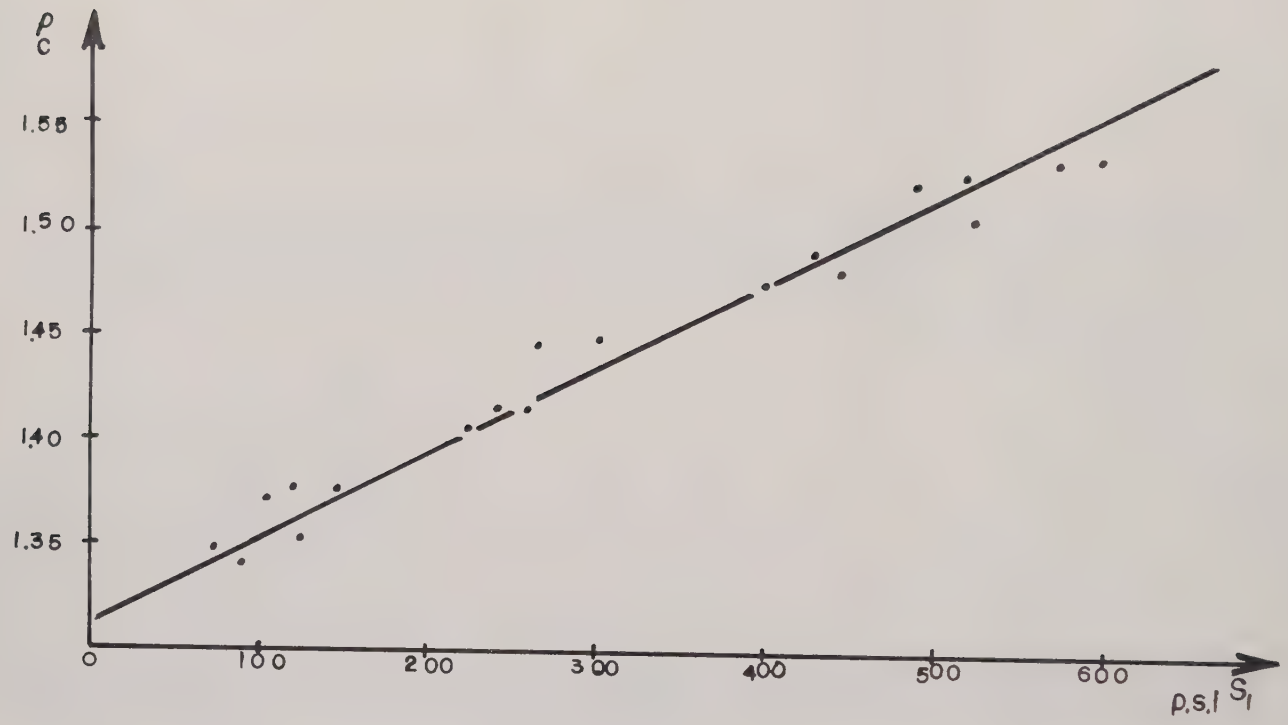
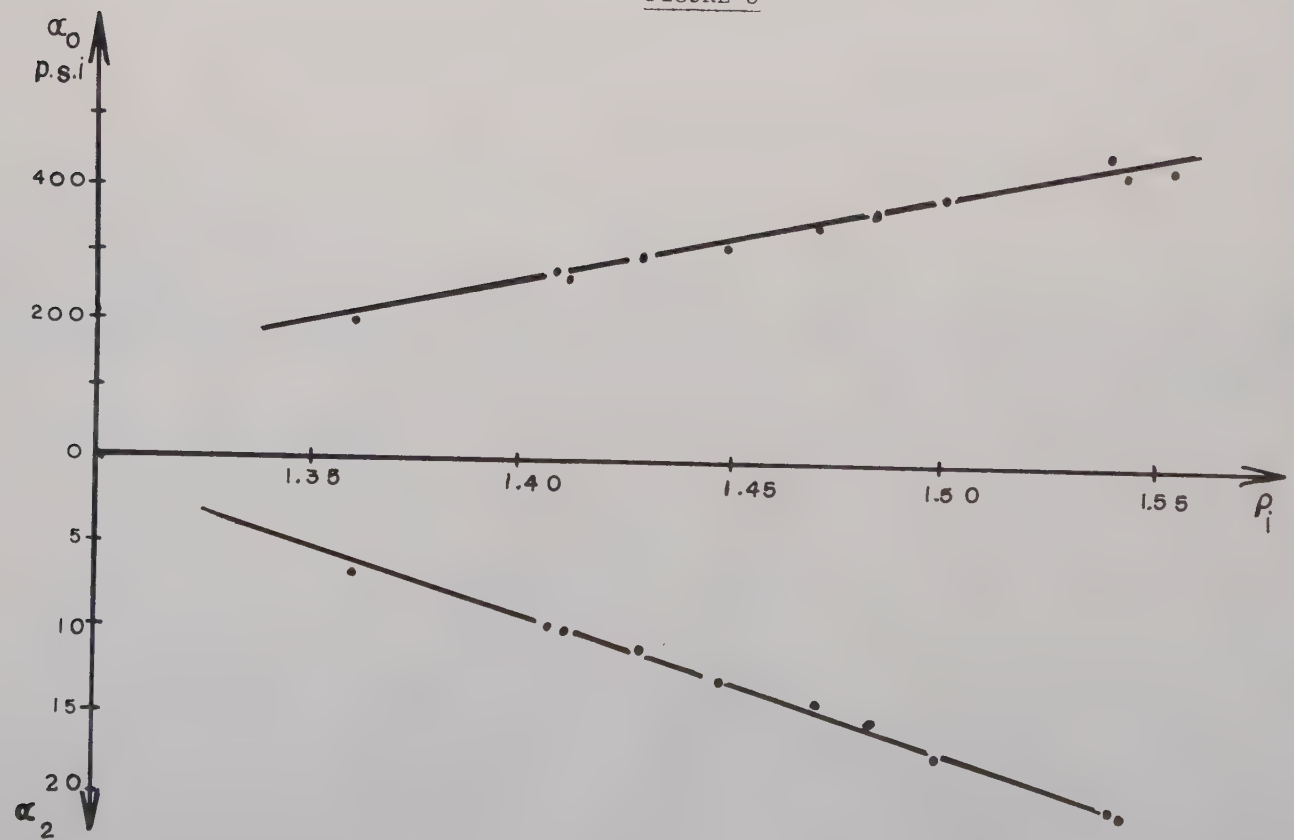

ρc
1.55
1.50
1.45
1.40
1.35
0
100
200
300
400
500
600
p.s.i
S1

FIGURE 8


α0
p.s.i
400
200
0
1.35
1.40
1.45
1.50
1.55
ρi
5
10
15
20
α2

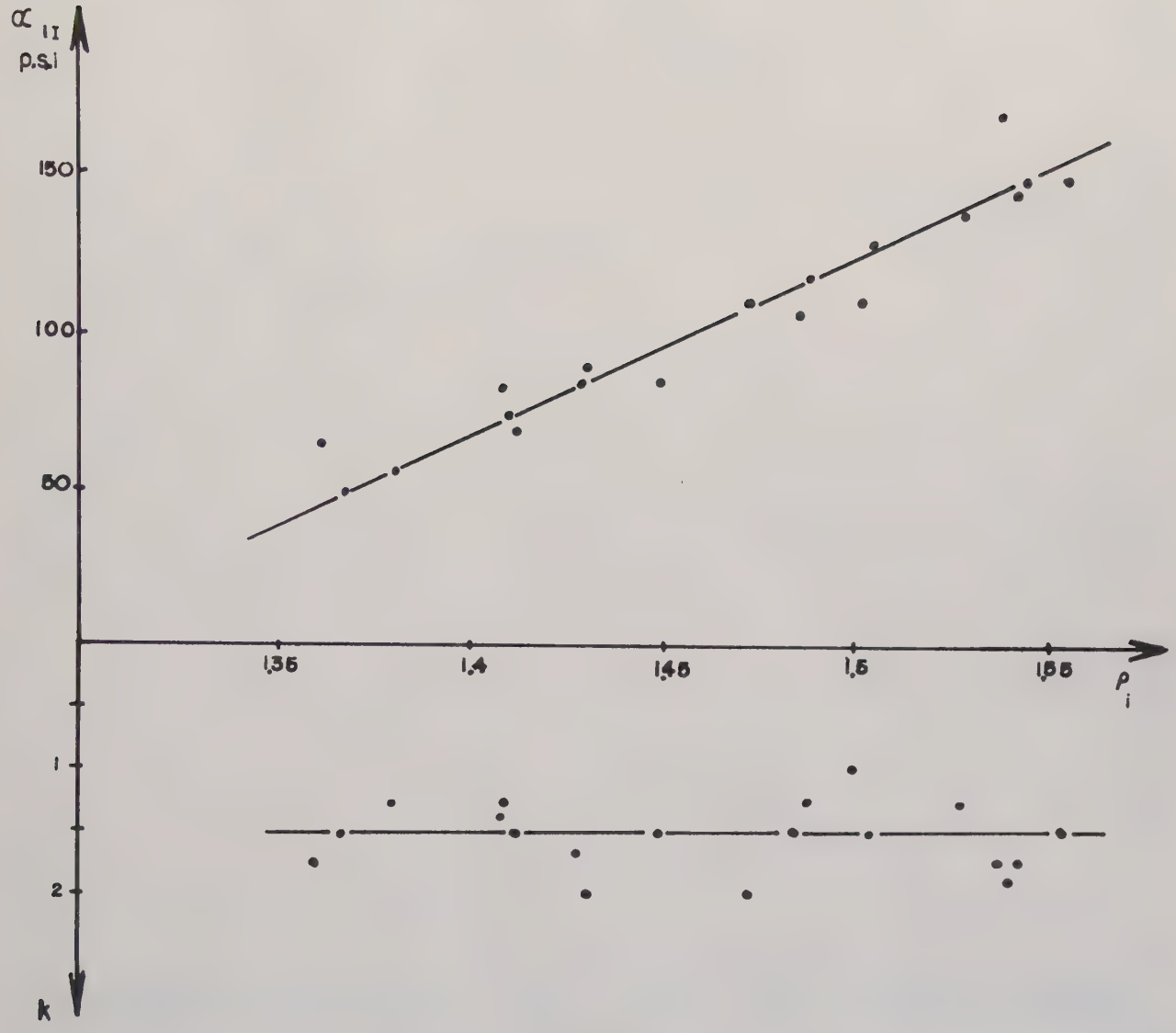


FIGURE 9

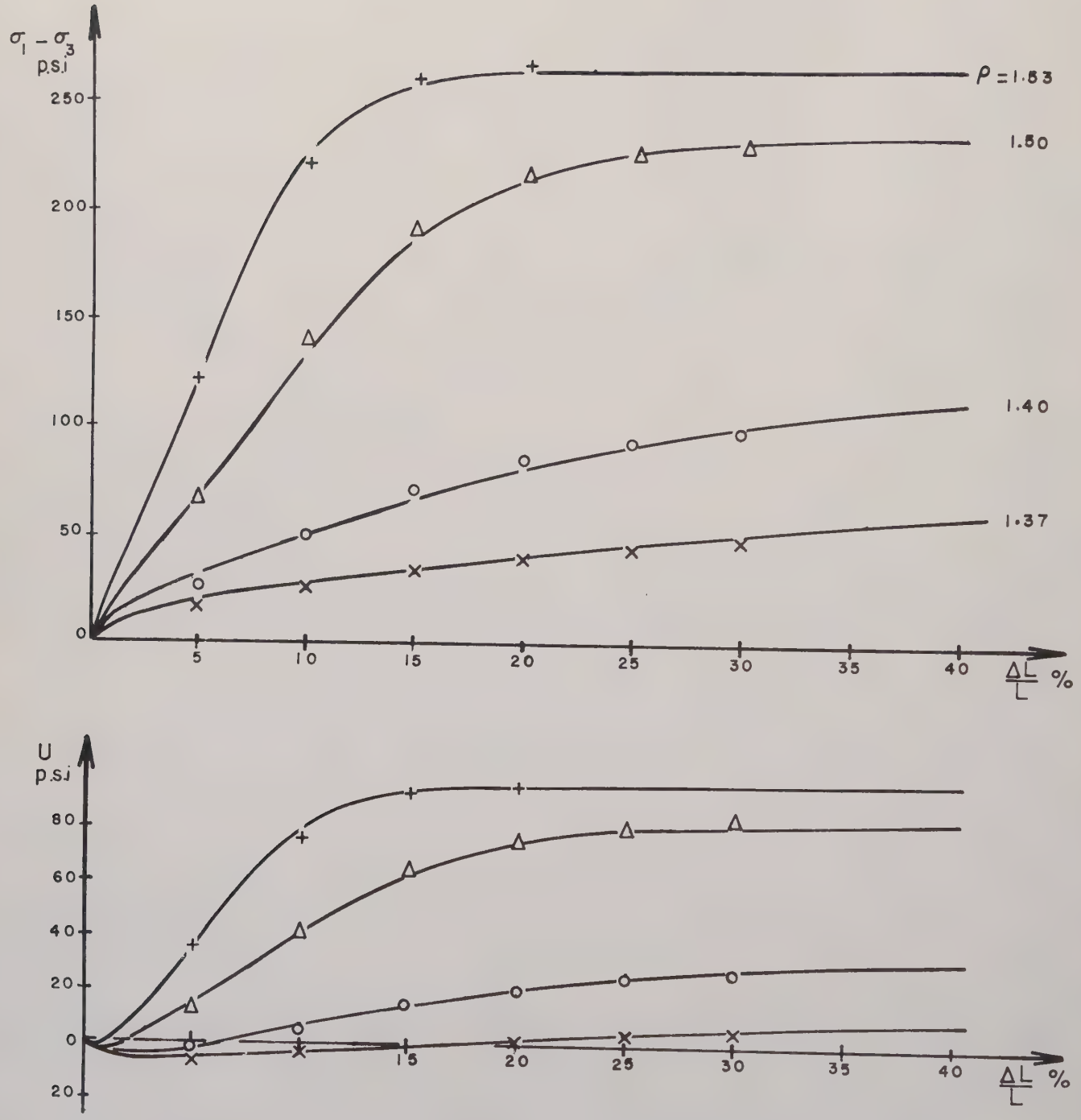


FIGURE 10

ESSAIS TRIAXIAUX NON DRAINES. P_0 = 15 p.s.i.

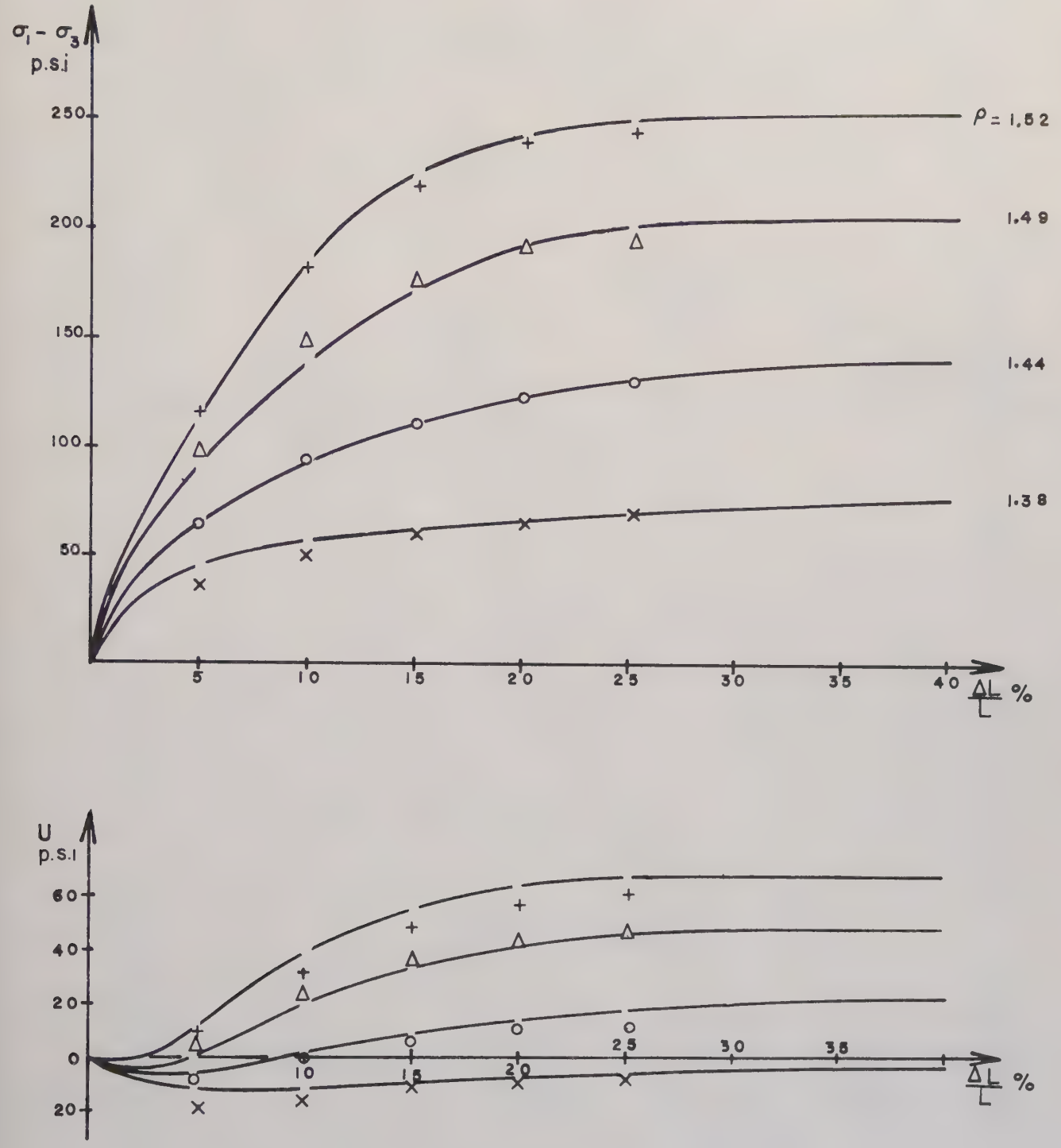


FIGURE 11

ESSAIS TRIAXIAUX NON DRAINES. P_0 = 35 p.s.i.

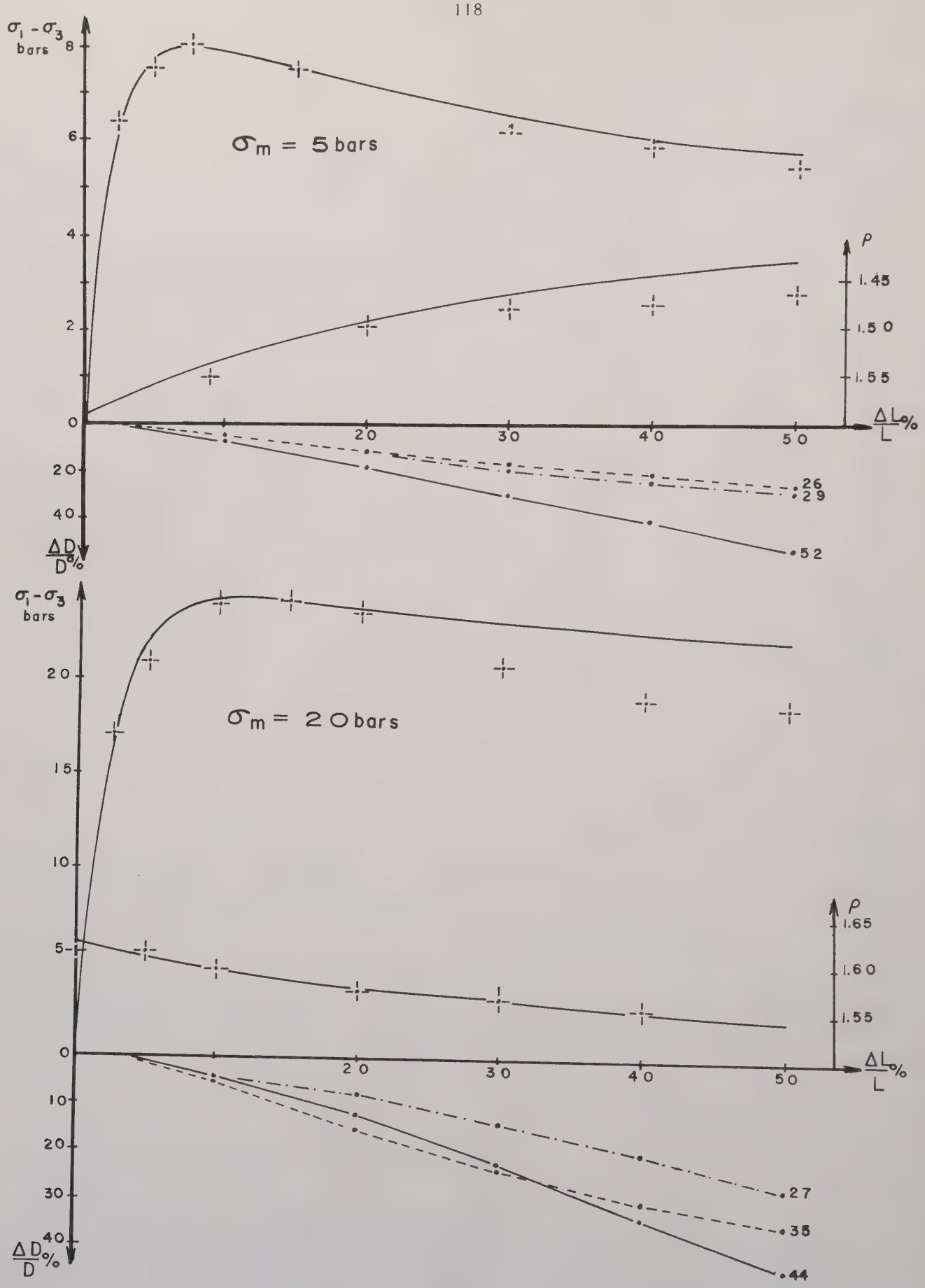

σ1 - σ3 bars
σm = 5 bars
ρ
1.45
1.50
1.55
ΔL/L %
ΔD/D %
26
29
52
σ1 - σ3 bars
σm = 20 bars
ρ
1.65
1.60
1.55
ΔL/L %
ΔD/D %
27
35
44

FIGURE 12

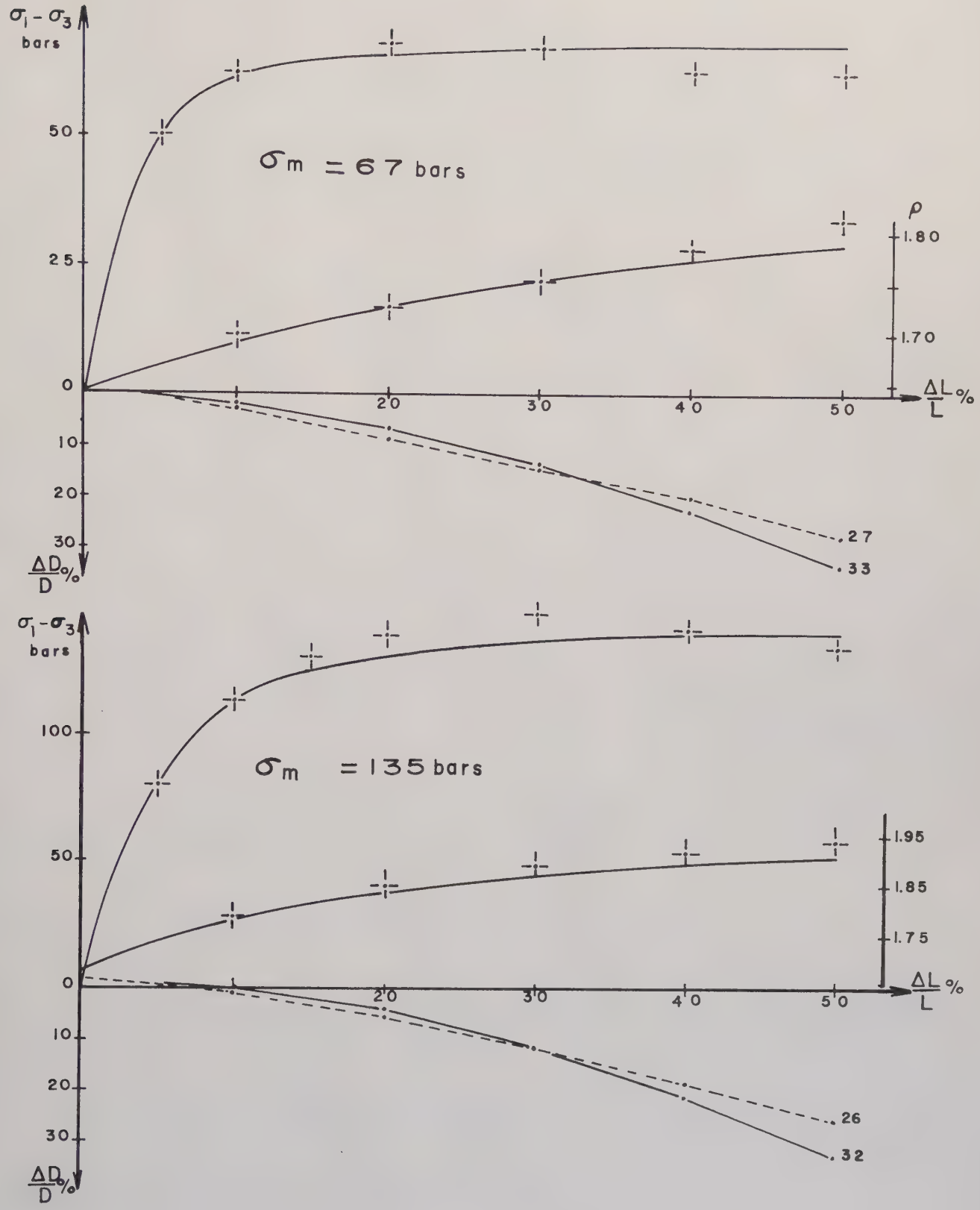
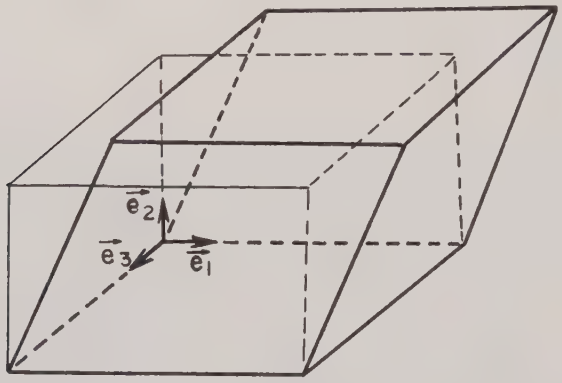

σ1 - σ3
bars
50
25
0
10
20
30
ΔD/D %
σm = 67 bars
ρ
1.80
1.70
20
30
40
50
ΔL/L %
.27
.33
σ1 - σ3
bars
100
50
0
10
20
30
ΔD/D %
σm = 135 bars
1.95
1.85
1.75
20
30
40
50
ΔL/L %
.26
.32

FIGURE 13

4°- Essai de cisaillement simple.

Considérons un échantillon de forme parallélépipédique, dont les arêtes sont parallèles aux vecteurs de base du repère orthonormé $(0, \vec{e_i})$.



Une déformation homogène est imposée à l'échantillon. Le champ de vitesse est donné par

$$v_1 = 2 \quad \dot{\varepsilon}(t) \quad x_2$$

$$v_2 = 2 \quad \dot{\eta}(t) \quad x_2$$

$$v_3 = 0$$

$\dot{\varepsilon}(t)$ est une fonction donnée du temps,

$\dot{\eta}(t)$ est pour l'instant une fonction inconnue qui dépend des variations de volume qui peuvent apparaître au cours de la déformation du matériau.

Les tenseurs vitesse de déformation et vitesse de rotation ont pour composantes dans $(0, \vec{e_i})$:

$$d_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \dot{\varepsilon} & 0 \\ \dot{\varepsilon} & \dot{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\omega_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \dot{\varepsilon} & 0 \\ -\dot{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Pour les parties isotrope et déviatoire de d_{ij} :

$$d_{ii} = \dot{\eta} \qquad \overline{d}_{ij} = \begin{vmatrix} -\frac{\dot{\eta}}{3} & \dot{\varepsilon} & 0 \\ \dot{\varepsilon} & \frac{2}{3}\dot{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{\eta}}{3} \end{vmatrix} \qquad (3.57)$$

On imposera en plus à l'échantillon, sur les deux faces parallèles au plan $\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$, la composante normale de la contrainte, P_o. Les faces parallèles au plan $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ seront supposées parfaitement lisses.

L'état de contrainte sera donc défini par :

$$S_1 = \sigma_{ii} \qquad \overline{s}_{ij} = \begin{vmatrix} \overline{s}_{11} & \overline{s}_{12} & 0 \\ \overline{s}_{12} & \overline{s}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{s}_{33} \end{vmatrix} \qquad (3.58)$$

avec $S_1 = 3\ (P_o - \overline{s}_{22})$.

Les composantes $\bar{s}_{ij}$ sont des fonctions du temps seul.

Le champ de contrainte sera obtenu par intégration des relations (2.6). Dans ces relations, interviennent les quantités $\bar{S}_2^{\,2}$, $\bar{S}_3^{\,3}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$.

$$\begin{aligned}
\bar{S}_2^{\,2} &= 2\left[\bar{s}_{11}^{\,2} + \bar{s}_{22}^{\,2} + \bar{s}_{12}^{\,2} + \bar{s}_{11}\ \bar{s}_{22}\right] \\
\bar{S}_3^{\,3} &= 3\,(\bar{s}_{11} + \bar{s}_{22})\,(\bar{s}_{12}^{\,2} - \bar{s}_{11}\cdot\bar{s}_{22}) \\
\bar{M} &= \bar{s}_{22}\ \dot{\eta} + 2\ \dot{\varepsilon}\ \bar{s}_{12} \\
\bar{N} &= \frac{\dot{\eta}}{3}\ N_1 + 2\ \dot{\varepsilon}\ \bar{s}_{12}\ N_2
\end{aligned} \tag{3.59}$$

où

$$N_1 = \bar{s}_{22}^{\,2} - 2\,\bar{s}_{11}^{\,2} + \bar{s}_{12}^{\,2} - 2\,\bar{s}_{11}\cdot\bar{s}_{22}$$

$$N_2 = \bar{s}_{11} + \bar{s}_{22}$$

Les expressions des membres de gauche des relations (2.6) sont données par

$$\hat{\bar{s}}_{ij} = \frac{d\,\bar{s}_{ij}}{dt} - \omega_{ik}\ \bar{s}_{kj} - \omega_{jk}\ \bar{s}_{ik} \tag{3.60}$$

On obtient alors le système :

$$\begin{aligned}
\frac{d\,S_1}{dt} &= (3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2\ S_1)E_1 + (3\alpha_3 + \alpha_4\ S_1)\ \bar{M} + (3\alpha_5 + \alpha_6\ S_1)\ \bar{N} \\
\frac{d\,\bar{s}_{11}}{dt} &= \left[\dot{\eta}\left(\alpha_2 + \alpha_4\ \bar{s}_{22} + \alpha_6\ \frac{N_1}{3}\right) + 2\ (\alpha_4\ \bar{s}_{12} + \alpha_6\ N_2)\ \dot{\varepsilon}\right]\bar{s}_{11} + 2\ \bar{s}_{12}\,\dot{\varepsilon} - \dot{\eta}\frac{\alpha_1}{3} \\
\frac{d\,\bar{s}_{22}}{dt} &= \left[\dot{\eta}\left(\alpha_2 + \alpha_4\ \bar{s}_{22} + \alpha_6\ \frac{N_1}{3}\right) + 2\left(\alpha_4\ \bar{s}_{12} + \alpha_6\ N_2\right)\dot{\varepsilon}\right]\bar{s}_{22} - 2\ \bar{s}_{12}\ \dot{\varepsilon} + 2\,\dot{\eta}\frac{\alpha_1}{3} \\
\frac{d\,\bar{s}_{12}}{dt} &= \left[\dot{\eta}\left(\alpha_2 + \alpha_4\ \bar{s}_{22} + \alpha_6\ \frac{N_1}{3}\right) + 2\left(\alpha_4\ \bar{s}_{12} + \alpha_6\ N_2\right)\right]\dot{\varepsilon}\ \ \bar{s}_{12} + \left[\alpha_1 - \bar{s}_{11} + \bar{s}_{22}\right]\dot{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

auquel il faut ajouter l'équation de continuité :

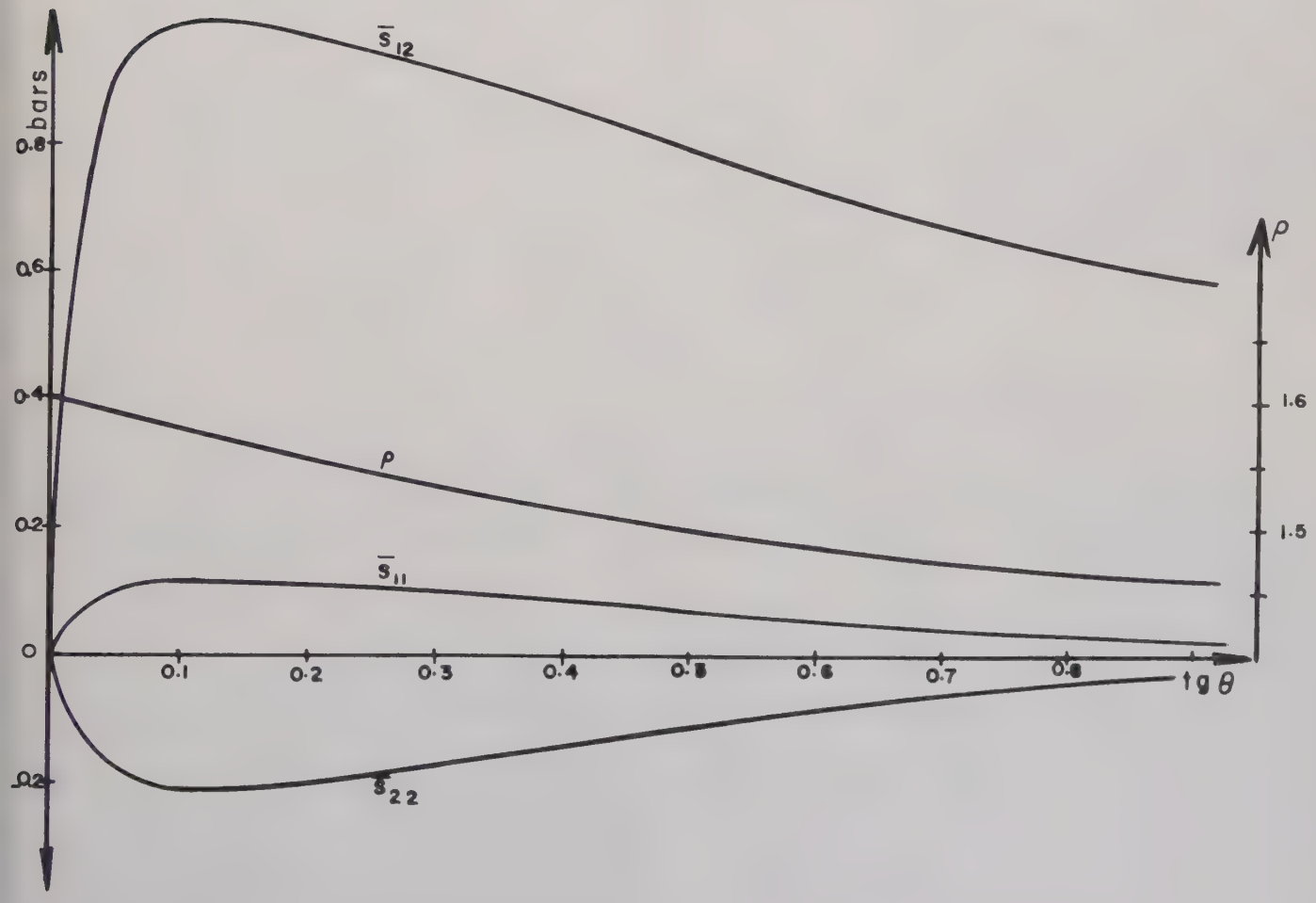
$$\frac{1}{\rho}\ \frac{d\rho}{dt} = \dot{\eta} \tag{3.62}$$

La fonction inconnue $\dot{\eta}$ peut être obtenue de l'égalité

$$\frac{d\, S_1}{dt} = -3\, \frac{d\, \bar{s}_{22}}{dt} \tag{3.63}$$

$$\dot{\eta} = \frac{2\, \bar{s}_{12} \left[1 - \alpha_3 - \alpha_4\, P_o - (\alpha_5 + \alpha_6\, P_o)(\bar{s}_{11} + \bar{s}_{22}) \right] \dot{\varepsilon}}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2\, P_o + (\alpha_3 + \alpha_4\, P_o)\, \bar{s}_{22} + (\alpha_5 + \alpha_6\, P_o)\, N_1} \tag{3.64}$$

On est conduit alors à la résolution du système d'équations (3.61-1,2,3,4) et (3.62) , où les fonctions α_3 , α_4 , α_5 et α_6 ont les expressions (2.29). Un exemple est donné sur la figure ci-dessous, pour les valeurs $\rho_c = 1.45$, $P_0 = 1$ bar. $\alpha_o = 300$, $\alpha_{II} = 50$, $\alpha_2 = 45$, $\rho_i = 1.6$ $k = 3$ $m = 0.2$



5°- *Trajet aller-retour*

Dans les exemples que nous venons d'étudier, le matériau était soumis à des sollicitations en déformation qui ne dépendaient que d'une seule fonction du temps $\varepsilon(t)$. Si on examine les résultats obtenus au cours d'un essai triaxial au cours duquel le sens de la déformation axiale a été inversé, on constate que la courbe effort-déformation de "retour" est semblable à la courbe "aller", en prenant le début du trajet retour comme nouvel état initial. [4]

Dans ces expériences, les trajets aller et retour peuvent être reliés au sens de variation de $\varepsilon(t)$. A partir de ce cas simple de sollicitation, on peut tenter de compléter la première loi, valable pour le trajet "aller", par une deuxième loi pour le trajet retour.

Si l'on désigne par σ_0 l'état contrainte atteint au moment de l'inversion du sens de la déformation, on peut supposer que la loi de retour sera de la forme $\hat{\underset{\sim}{\sigma}}^* = g\,(\underset{\sim}{\sigma}^*, \underset{\sim}{d})$ ou on a posé $\sigma^* = \sigma - \sigma_0$, la fonction g ayant une forme semblable à la fonction f du trajet aller.

Examinons l'exemple d'un essai triaxial à pression moyenne constante S_1 = cte. Nous supposons que les variations de volume dues au cisaillement sont nulles et que le matériau obéit pour le premier trajet à la loi :

$$\hat{\overline{\underset{\sim}{\sigma}}} = \alpha_1 \left(\overline{\underset{\sim}{d}} - \frac{\overline{M}\ \overline{\underset{\sim}{\sigma}}}{\alpha_c^{\,2}\, S_1^{\,2}} \right)$$

α_1 et α_c étant deux constantes.

Partant de l'état initial isotrope $\underset{\sim}{\sigma} = \frac{S_1}{3}\underset{\sim}{\delta}$, nous imposons la sollicitation $\underset{\sim}{d} = \begin{vmatrix} \dot{\varepsilon} & & \\ & -\frac{\dot{\varepsilon}}{2} & \\ & & -\frac{\dot{\varepsilon}}{2} \end{vmatrix}$, tout en maintenant la valeur de S_1 constante.

La loi conduit alors, avec les notations introduites en 3, à :

$$\frac{dT}{d\varepsilon} = \alpha_1 \left[1 - \frac{3}{2}\ \frac{T^2}{\alpha_c^{\,2}\, S_1^{\,2}} \right]$$

d'où l'on obtient la courbe de charge pour le trajet aller :

$$T = \alpha_c \; S_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \quad th \quad \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \; \frac{\alpha_1}{\alpha_c \; S_1} \; \varepsilon \right)$$

On constate que T tend asymptotiquement vers la valeur limite $T = \sqrt{\frac{2}{3}} \; \alpha_c \; S_1$, correspondant à un comportement plastique ayant pour surface d'écoulement $\bar{S}_2 = \alpha_c \; S_1$ quand $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$.

Supposons que le sens de la déformation soit inversé à l'instant $t = t_1$ ou $T = T_1$, $\varepsilon = \varepsilon_1$. Le trajet retour selon nos hypothèses s'effectuera avec la loi $\hat{\bar{\underset{\sim}{\sigma}}}^* = g \; (\bar{\underset{\sim}{\sigma}}^*, \underset{\sim}{d})$. Si pour le trajet aller $0 < t < t_1$ $\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_o}{1 + \varepsilon_o . t}$ pour le trajet retour $t > t_1$, $\varepsilon(t) = \frac{- \varepsilon_o}{1 + 2 \; \varepsilon_o . t}$.

Dans ce cas particulier, $\hat{\bar{\underset{\sim}{\sigma}}}^* = \alpha_1 \; \left(\underset{\sim}{d} - \frac{\bar{M}}{\alpha^{*2} \; S_1^2} \cdot \bar{\underset{\sim}{\sigma}}^* \right)$

Pour préciser α^*, on peut remarquer que, pour le trajet aller, $\alpha_c \; S_1$ représentait l'écart existant entre les valeurs de $\bar{S}_2$ correspondant à l'état limite et à l'état initial. Si pour le trajet retour, la surface limite est $(\bar{S}_2) = \alpha_T \; S_1$, avec $\sigma_2 = \sigma_3 > \sigma_1$, l'écart existant entre les valeurs de $\bar{S}_2$ correspondant à ce nouvel état limite, et l'état de départ pour le trajet retour est $\sqrt{\frac{3}{2}} \; T_1 + \alpha_T \; S_1$. Posant cette quantité égale à $\alpha^* S_1$, on obtient :

$$\alpha^* = \alpha_T + \frac{T_1}{S_1} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

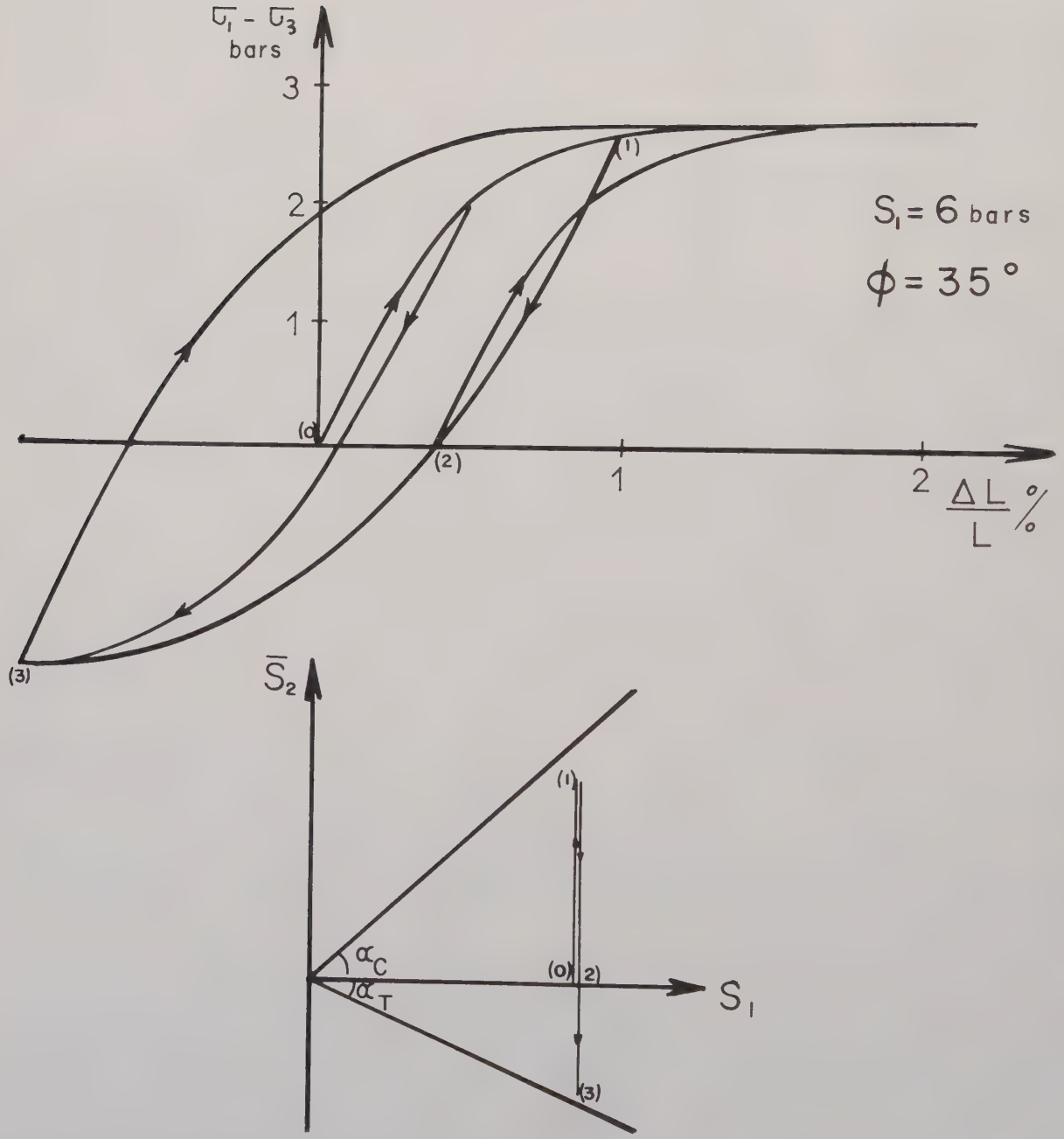
La courbe effort déformation de retour sera donnée par intégration de $\frac{dT^*}{d\varepsilon} = \alpha_1 \; \left(1 - \frac{3 \; T^{*2}}{2 \; (\alpha^* \; S_1)^2} \right)$

On obtient alors :

$$T = T_1 + \alpha^* \; S_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \quad th \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \; \alpha_1 \; \alpha^* \; S_1 \; (\varepsilon - \varepsilon_1) \right]$$

Si de nouveau le sens de la déformation est inversé, on obtiendra de manière analogue, la nouvelle réponse du matériau. Les résultats sont illustrés sur la figure suivante.

Ces résultats sont à rapprocher de ceux obtenus par PERSOZ [47] dans le cas d'un modèle rhéologique unidimentionnel, formé de patins et de ressorts montés en série.


$\overline{\sigma_1} - \overline{\sigma_3}$
bars
3
2
1
(0)
(1)
(2)
(3)
1
2
$\frac{\Delta L}{L}$ %
$S_1 = 6$ bars
$\phi = 35°$
$\overline{S_2}$
α_C
α_T
(0) (2)
S_1

C O N C L U S I O N

Nous avons, dans la dernière partie de notre travail, proposé une loi qui sous certaines conditions, permet de décrire, par un formalisme unique, le comportement du matériau depuis la phase des déformations infinitésimales jusqu'à celles des très grandes déformations où le matériau a un comportement parfaitement plastique.

Les différentes comparaisons que nous avons effectuées avec l'expérience ont permis de montrer que la loi peut décrire ces expériences avec une bonne approximation. Il faudra maintenant étudier des chemins en déformation et en contrainte plus complexes que ceux que nous pouvons suivre actuellement. L'étude expérimentale de tels chemins sera entreprise prochainement à l'aide d'un véritable appareil triaxial dont la réalisation est actuellement en cours.

Une limitation de la théorie proposée provient de la forme isotrope de la loi. Elle ne peut s'appliquer en toute rigueur qu'à des matériaux qui restent isotropes au cours de la déformation. Si l'on veut donc pouvoir décrire avec précision la réalité physique, il faut que la loi de comportement puisse décrire l'anisotropie du matériau créé par la déformation. On peut espérer que l'introduction dans la loi de comportement d'un tenseur représentant les modifications de la structure du matériau pourra permettre une meilleure description du comportement réel du matériau.

R E F E R E N C E S

1 ANGLES d'AURIAC P. "Définition et principes en rhéologie tensorielle". Symposium I.U.T.A.M. Rhéologie et Mécanique des Sols. Grenoble (1964).

2 ANGLES d'AURIAC P. "Les principes en Mécanique des Milieux Continus". La Houille Blanche 5 427-432 (1970).

3 BESSELING J.F. "A thermodynamic approach to Rhéology". Symposium I.U.T.A.M. "Irreversible aspects of continuum mechanics". Vienne (1966).

4 BIAREZ J. "Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des sols et des matériaux pulvérulents". Thèse de Doctorat ès Sciences. Faculté des Sciences de Grenoble (1962).

5 BISHOP A. W. "Progressive failure with spécial reference to the mechacism causing it". Proc. Geotech. Conf. Oslo 2 142-150 (1967).

6 CALDONAZZO B. "Sui moti liberi di un mezzo continuo". Ann. di Mat. 26 43-55 (1947).

7 CASAGRANDE A. "Characteristics of cohesionless soils affecting the stability of slopes and earth fills". Contributions to soil mechanics 1925 - 1940 Boston Society of Civil Engineers, Oct. (1940).

8 DE JOSSELING DE JONG G. "Statics and kinematics in the failure zone of a granular material". Uitgeverij Waltman. Delft (1959).

9 DOMASCHUK L., WADE N.H. "A study of bulk and shear moduli of a sand". Journal of Soil Mechanics and foundations divisions, ASCE Vol. 95 (March 1969).

10 DRUCKER D.C., GIBSON R.E., HENKEL D.J. "Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity". Trans. ASCE 122, 338 (1957).

11 DRUCKER D.C., PRAGER W. "Soil mechanics and plastic analysis or limit design". Quart. Appl. Math. 10 2 (1952).

12 El. SOHBY M.A. "The behaviour of particulate materials under stress". Thesis presented to The Victoria University of Manchester. (Octobre 1964).

13 ERINGEN A.C. "Non linear theory of continuous media". Mc GRAW-HILL (1962).

14 GREEN A.E. "Hypo-elasticity and plasticity". Proc. Roy. Soc. Lond. A. 234 46-50 (1956).

15 HAYTHORNTHWAITE R.M. "Stresses and strains in soils". Proc. 2nd. Symp. Naval Struct. Mech. Pergamon Press (1960).

16 HVORSLEV M.J. "Uber die fesigkeitseigenschaften gestörter bindiger bodën". Ingvidensk. Skr. A 45 (1937).

17 ILIUSHIN A.A. "On the postulate of plasticity". Prikl. Mat. Mekh. 25 3 (1961).

18 JAUMANN G. "Geschlossenes system physikalischer und chemischer differenzialgesetze". Sitzber. Akad. Wiss. Wien (IIa) 120 385-530 (1911).

19 KO H.Y. and SCOTT R.F. "Deformation of sand in hydrostatic compression". Journal of the soil mechanics and foundations division ASCE Vol. 93 (May 1967).

20 KONDER L., ZELASKO J.S. "A hyperbolic stress-strain formulation for sands". Second Pan-American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. 1 289-324. (1963).

21 LADANYL B. "Etude des relations entre les contraintes et les déformations lors du cisaillement des sols pulvérulents". Annales des travaux publics de Belgique 3 (1960).

22 LE LONG "Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des sols sous fortes pressions". Thèse de Docteur-Ingénieur. Grenoble (1968).

23 MANDEL J. "Sur les équations d'écoulement des sols idéaux en déformation plane et le concept du double glissement". J. Mech. Phys. Solids, 14, 303-308 (1966).

24 PALMER A.C. "A limit theorem for materials with non-associated flow laws". Journal de Mécanique 5 2 217-222 (1966).

25 POOROOSHASB H.B., HOLUBEC I., SHERBOURNE A.M.
"Yielding and flow of sand in triaxial compression".
Canad. Geotech. Journ. 3 4 179-190 (1966).

26 PRAGER W.
"On isotropic materials with continuous transition from elastic to plastic state".
Proc. 5th Int. Conf. Appl. Mech. Cambridge (1938).

27 RADENKOVIC D.
"Théoremes limites pour un matériau de COULOMB à dilatation non standardisée".
C.R.A.S. (12 Juin 1961).

28 REYNOLDS O.
"Experiments showing dilatancy, a property of granular material".
Proc. Roy. Inst. Gt. Britain 11 354-363 (1887).

29 RIVLIN R.S., ERICKSEN J.L.
"Stress-deformation relations for isotropic materials".
J. Rational Mech. Anal. 4 324-425 (1955).

30 SAWCZUK A., STUTZ P. "On formulation of stress-strain relations for soils at failure".
Z. ANGEW. Math. Phys. 19 770-778 (1968).

31 SAWCZUK A., STUTZ P. "Sur le critère d'écoulement et la loi de déformation plastique".
C.R.A.S. 266 87-89 (1968).

32 SKEMPTON A.W.
"The pore pressure coefficients A and B".
Geotechnique 4 143-147 (1954).

33 SOKOLOWSKI V.V.
"Statics of Soil Media".
Butterworths, (1960).

34 SPENCER A.J.M.
"A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions".
J. Mech. Phys. Solids, 12, 337-351 (1964).

35 STUTZ P.
"Remarque sur l'écoulement plastique dans le cas d'une relation tensorielle linéaire entre contrainte et déformation".
C.R.A.S. 265 481-484 (1967).

36 STUTZ P.
"Remarque sur l'écoulement plastique dans le cas d'une relation tensorielle non linéaire".
C.R.A.S. 266 1149-1152 (1968).

37 STUTZ P. "Comportement élasto-plastique des sols en grande déformation".
Arch. Mech. Stos. 6 22 663-673 (1970).

38 THOMAS T.Y. "Plastic flow and fracture in solids".
Academic Press. (1961).

39 TRUESDELL C. "Hypo-elasticity".
J. Rational Mech. Anal. 4 83-133 (1955).

40 TRUESDELL C. MOLL W. "The non linear field theories of mechanics".
Encyclopedia of physics. III/3 Springer. Verlag (1965).

41 WACK W. "Mesures par radioactivité en mécanique des sols".
Thèse de Doctorat ès Sciences physique. Grenoble (1968).

42 WINEMAN A.S., PIPKIN A.C. "Material symmetry restrictions on constitutive équations".
Arch. Rational. Mech. Anal. 17 184-214 (1964).

43 ZIEGLER H. "A possible Generalisation of Onsager's theory".
Symposium I.U.T.A.M.
"Irreversible aspects of continuum mechanics".
Vienne (1966).

44 ZIEGLER H. "Some extremum principles in irreversible thermodynamics with application to continuum mechanics".
"Progress in solid mechanics".
Vol. IV. Morth. Holland.

45 KIRCKPATRIK W.M. "Condition of failure for sands".
Proc. 4th Int. Conf. Soil Meck 1, 172-178 (1957).

46 PALMER A.C., MAIER G., DRUCKER D.C. "Normality relations and convexity of Yield surfaces".
"Journal of applied mechanics". June 1967 (464-470)

47 PERSOZ B. "Modeles non linéaires".
La rhéologie. Monographies du centre d'actualisation scientifique et technique de l'I.M.S.A. Masson et Cie. 1969.

48 ROSCOE K.H. "Principal axes observed during simple shear of sand".
Proc. Geotech. Conf., OSLO (1967).

49 THOMAS T.Y. "Combined élastic and PRANDTL-REUSS stress-strain relations".
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S., 41/ 720-726 (1955).

50 DRUCKER D.C. "A more fondamental approach to plastic stress-strain relations", 1st U.S. Congress of Applied Mechanics A.S.M.E. (1952)

51 BOUTWELL J. "On the yield behavior of cohesionless materials", Ph. D. Thesis, Duke University (1968).

52 HENCKEL D.J. " The relationships between the strength, pore-water pressure and volume change characteristics of saturated clays", Geotechnique, Vol. 9, 3, 119-135 (1959).